イメージでつかむ

イプシロンデルタ・位相空間論

村上 仙瑞
Murakami Senzui

プレアデス出版

イメージでつかむ

イプシロンデルタ・位相空間論

村上 仙瑞
Murakami Senzui

プレアデス出版

まえがき

私は 20 年以上前に大学の数学科に入学してからずっと，イプシロンデルタ論法や位相空間論やルベーグ積分などでいろいろ悩み，それらを理解するのに青春をかけてきた．暇さえあれば，それらに関連する数学書を読んでは理解しようと悩んでいた．そんな当時が今となってはとても懐かしい．

私はいま中高の数学教師をしている．特にここ数年ずっと中学の数学を担当している．十数年も中学生に数学を指導していれば，どのようなところで生徒が躓くのかわかってくる．必ずしも成功しているとは言い難いが，それを回避するような教材・授業研究を日々重ねている．こうした生徒の躓きを私自身の教師の糧としてためていく中で，私が大学生だった頃のイプシロンデルタ論法や位相空間論やルベーグ積分の格闘をふと思い出すことが多かった．教師になってはじめてわかる生徒の躓きの気持ちを，私自身の経験に重ね合わせ，自分なりの中で整理して，イプシロンデルタ論法や位相空間論のアイデアを，中高教師の視点から教えられないかとふと思って筆をとったわけである．

大学を卒業して 20 年弱，いろいろな経験をさせてもらいながら，少しずつ心に余裕をもっていろいろな状況を判断ができるようにはなってきた．大学の数学の本を読んでみても，少し余裕をもって落ち着いて考えられるようになった．そうした心の余裕が，今となって大学の数学の理解を促してくれた．中学の教師という視点と私が悩み続けた経験を絡めながら数学書を読んでいくと，ここの部分をもっとわかりやすく教えれば，たいした問題ではないのではないかと思える部分が非常に多かったのである．あんなに難しかったイプシロンデルタ論法や位相空間などの問題も，説明の仕方一つでそんなに難しくないのではないかと思いはじめて，暇を見つけてはメモをとっていくと，いつのまにか分厚いレポートができていた．アイデア 1 つ，一言アドバイスを入れることで大きく理解が促されることがある．私がいままで

書きためたレポートにそれにこだわって加筆し，この本が完成できた次第である．

この本はイプシロンデルタ論法と位相空間論のアイデアを高校生の視点から解説した本である．数学の本質という言葉を使うと大学の先生に突っ込まれるかもしれないので，敢えてアイデアという言葉を使わさせてもらった．それにこの本はイプシロンデルタ論法や位相空間論の性質がどこで役に立っているのか，高校時代の考えがどのように一般化されているのか，そのアイデアは何か，式の意味にこだわって解説した．また本文の中に コメント を挿入した．これは私が今まで理解したときの感想や体験を述べたもので，読者にとって蛇足以外なにものでもないが，このコメントを読むことによってさらなる理解が深まるのではないかという老婆心からである．

また位相空間に限っていうと，いかに位相空間がいかされているのかという躍動感のある位相空間を解説したつもりである．だから位相空間とはどういうものかを解説したものであるから，事細かな言葉や定理などはほとんどないし，有名どころの位相空間の言葉に限定した．一般の位相空間の内容は，学ぶことが多すぎて，薄い本の中にたくさんの抽象的な数学用語を並べているだけで，それを1年間で終わらせないといけないし，例題もほとんどないので，はじめての生徒にとってみれば訳が分からないのも無理もない分野である．しかも内容が難しすぎるので，たとえそれらを理解できたとしても，章末問題を解こうと思ってもちんぷんかんぷん．解答を読んでみてもちんぷんかんぷん．そんな経験をした学生も多いのではないだろうか．だから理解したつもりでも，何も分かっていないのではないかという自己嫌悪に陥ってしまう．そんな経験をした学生もたくさんいることであろう．

特に初心者への位相空間の指導で大事なことは，多くのことを教えすぎないということだと思う．これも，長年の中高教師の経験からよるものである．位相空間を理解するには，一般に有名な数学書で勉強して，たくさんの言葉を学ぶことも大事であるが，初心者にとっては，一般的な勉強だけでは，抽象的な位相空間論で，何がいいたいのかわからないという感想を抱きがちな人が多いはずである．たくさんの位相空間の言葉や定理を学ぼうとして消化不良を起こすよりも，極力少ない言葉の定義で位相空間のアイデアを理解し

た方が，よほど実力がついていくと思われる．私たち数学教師は問題の解き方のパターンを教えることも大事であるが，数学のアイデアやそう考えることによってどのようなことが役に立つのかなどの，それから先のつながりと目標を教えることがメインとならないといけないと思う．教師の立場であれば，数学が得意なのであるから，いろいろな引き出しを教えようと，たくさんのことを教えようとするが，得意な生徒，根気のある生徒であればそれでよいが，そうでない生徒に目を向けさせるには，そうした工夫も必要だと考えている．この本はそうした私の教師経験のメッセージも含まれている．いまの中学生の文部科学省検閲の数学の教科書は，この分野は実際社会生活でどのように役に立っているのであるかという，実社会に密接に関わる具体例が豊富に掲載されている．つまりいま学んでいる数学が，今後どこで役に立つのかということに重点を置いて解説されているのである．生徒にとってみれば，いま学んでいる数学を，目的を持って勉強できるということである．そのような観点から，抽象的なイプシロンデルタ論法や位相空間論も今後実社会はともかくとして，今後の数学分野でどのように役に立つのかを意識して解説もした．それを教えるのが私たち教師の仕事であると思う．

「指導者がよければ生徒が伸びる」．これは私の持論であり，座右の銘でもある．いい指導者がいるクラブは必ずといってもいいほど強い．強いだけでなく部員の礼儀も正しい．授業に関しても，偏差値を上げられなくても，少なくともその教科が嫌いになるという生徒が少なくなる．勉強は教えられるものではなくて，自分で一所懸命やって悩んではじめて身につくものである．結局勉強は生徒自身の意識が大事である．それも 100 %正しいし，もちろん私も支持する．しかし教師はこの言葉に甘えてはいけない．なぜならこれは勉強ができる生徒であればそれが成り立つが，現実そうでない生徒の方が多いから，指導者の力量によるわけである．わからなくて勉強から遠ざかっている生徒にどのようにして，勉強に食いつかせるのか，それが教師という指導者の仕事である．そしてできる生徒にはもっと意識を高めてあげるのも教師の仕事である．

この本が上記に書いてあるようないい指導者の役割を果たすかどうかは，

この本を何かの縁で手にすることになった読者次第である．だから，この本を読んでいただいた，読者の評価も気になる．わかりやすく教えるというのは，漫画にして教えればよいということではない．簡単な数字で教えることでない．わかりやすく教えるというのは，聞き手や読み手が，「なるほどそういう意味だったのか」と感動を得，一気に世界観が広がるような感覚・イメージをもたせることである．そして，聞き手や読み手が，具体例をいろいろ作れるようになることである．そして勉強のやる気をもたせることである．勉強で大事なのは，「わかればおもしろい」ということであり，それを生徒に教えることである．これには時間と根気が必要である．気持ちを焦ってはいけない．私がわかりやすくかいたつもりでも，最初はものすごく難しく感じる人も多いであろう．勉強は根気と時間が必要である．簡単に投げ出すようにはならないようしてもらいたい．イプシロンデルタ論法や位相空間論で躓いて，大学の数学が嫌になっている学生やもう一度学び直したいという社会人の方々が，この本を読むことによって，イプシロンデルタ論法や位相空間がわかったという気持ちになり，わかれば楽しい，そしてもっと勉強がしたくなったというような，いいスパイラルに入られるようになることを願いたい．この本が単なる私のうぬぼれにはならないですむことだけは願いたい．そして，私の性格からか，文章がしつこくなった感があるが，この点についてはお許し願いたい．

最後に，私のつたない原稿を，出版まで導いていただいた，プレアデス出版の麻畑仁氏に，心より感謝の意をこの場を借りて表したい．

そして本書を書く際に私を支え続けてくれた愛する家族，妻の明貴子，長男の宗一郎，長女の聡子にこの本を捧げたい．

2014年8月

和歌山県龍神村にて　　村上仙瑞

目次

第 I 部

イプシロンデルタ論法

第1章 数列のイプシロンデルタ論法

1.1 イプシロンデルタ論法を学ぶにあたって

高校時代までの極限の問題といえば，数列の極限，無限級数の極限，関数(列) の極限などを考えてきた．その中でも，極限の問題を考えるときに，主に収束する数列を考えてきた．極限値を求めることだけが主な対象であり，収束する数列の極限値を求めるときはいろいろなパターンがあり，受験勉強においてはたくさんのパターンを身につけ，その極限値を求めて，いわば極限値を求めることがクイズのようであった．

しかし大学の数学になると，そういった極限値を求める数列の話以外の学習が増えてくる．たとえば数列の極限を学習するとき，収束する数列と収束をしない数列の違いは何かを学習するようになる．受験数学において極限値を求めることに興味をもった大学生にとっては，そんなことどうでもよいことかもしれない．与えられた問題を解く数学の勉強から，式の意味など内容の本質を学ぶ勉強に変わっていくのである．このギャップがとても大きいのである．そのギャップの象徴として語られるのが，収束する数列の本質を学習するイプシロンデルタ論法である．大半の大学新入生が，イプシロンデルタショックといわれる経験をするといわれる．これはギャップというより，与えられた問題を効率よく解くことのみが求められた大学入試のための学習環境が原因の 1 つでることは間違いない (入試数学を否定しているのではない)．式の本来もつ意味やどうしてそう定義されるのかなど，式や定義の背景などを考えるという勉強を中心としてしなかったせいである．本来であれば，高校数学においてもこのような勉強をしないといけないのであるが，時間内に要領よく解く数学に追われて，数学本来の学習が後回しにされているのが現実である．

このギャップを埋めることこそが大学の先生の仕事であるが，今はどうかよくわからないが，20 年前の私の学生時代に限っていえば，すごく熱心な先生が多かったが，レベルが高すぎて理解するにも追いつけなくて，ギャップを埋める余裕さえなかった (ギャップも説明してくれただろうが，私の理解ははるか遠くにあった)．そしてそのギャップを埋めようとする本も少なかった．今でこそ，そういうたぐいの専門書が増えたが，まだ少ないし，大半が大学の先生によってかかれている．

そこで，現中学数学教師として生徒の躓きやすいところを把握している立場として，また私が学生時代に苦労した経験から，大学新入生が一番躓きやすいとされるイプシロンデルタ論法を高校の数学の題材をなるべく用いて，受験数学になれた人にも数列の極限値の本質に興味をもってもらうように注意をはらいながら解説できないかと思ったわけである．

ここでは，イプシロンデルタ論法のイメージをわかせ直感を大事にしながら，高校からの極限の問題を利用して，高校と大学の大きなギャップを埋めることを最大の目標にして，イプシロンデルタ論法を解説していくことにする．

初心者が躓きやすいというより，私が学生時代に悩みに悩み続けたことを回想し，それを解決してきた内容になるであろう．イプシロンデルタ論法を図をたくさん用いてイメージがわくように解説する．初心者が躓きやすいところを，丁寧に解説していきたいと思う．そしてイプシロンデルタ論法は，抽象的な文章になり，独特な言い回しがむしろ理解の促進を妨げている．イプシロンデルタ論法は，いっている式の意味がわかれば全く難しくない．大学数学独特の言い回しが，イプシロンデルタ論法の理解を妨げていると経験上いえる．そして，そのイプシロンデルタ論法の式のいわんとする式の意味を，この本で解説しようと思うわけである．

とにかく，途中わからないことがあり，立ち止まることがあるかもしれないが，細かいことを気にせずに一気にとりあえずは読んでもらいたいと思う．

1.2　イプシロンデルタ論法の難しさ

先にも述べたが，今はどうか知らないがイプシロンデルタショックを受ける大学新入生が多く，今では敢えてさける大学も多いと聞く．しかし，イプシロンデルタを避けて通ると，数列の収束，実数の連続性，関数の連続性，一様連続，一様収束などほとんどの大学数学の教養の範囲を本格的に理解できなく，単なる高度な計算だけで終わる場合が多くなってしまう．やはり極限や関数の連続性を本格的に考えるときは (大学の数学をきっちり理解しようとするときは)，イプシロンデルタ論法は絶対に避けて通れないのである．これでは非常にもったいないし，大学の数学を学ぶ意味が半減してしまうと考える．

なぜイプシロンデルタが難しいのか，もう一度整理してみよう．

(1) 極限値を求める問題に慣れてしまって，収束する数列の特徴など本質を考える学習とのギャップがありすぎる．
(2) 大学の先生が高校数学とのギャップを考えないで授業を進める場合がある．
(3) イプシロンデルタの定義式が難しいし，式の意味がわからないので，かえって収束する数列のイメージがわきにくい．しかも，式の本質を考える学習を後回しにしてきた．

などである．つまり大学新入生にとって，何を言っているのかわからないのである．しかしもっと大きな理由があると個人的に思うが，それは $\varepsilon - m$ 論法を述べた後でないと解説できないので，ここでは述べていないが，p.104 の節 1.16 で述べている．

1.3　lim の入った高校時代の極限問題

高校時代たくさんの極限問題を考えてきた．たとえば以下のような問題である．これらの極限に絡んだ問題は全て高校の教科書に掲載されているものである．

数列の極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-6n}{2n^2+5n-4},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n},\quad \lim_{n\to\infty}(-1)^n,\quad \cdots \qquad \text{など}$$

関数の極限

$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ において，$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$

$f(x)=\dfrac{x^2+ax}{x}$ において，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax}{x}$

$f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$ において，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

関数の微分

$f(x)=x^2$ の $x=a$ における微分係数　　$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

関数の連続性

$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ の $x=0$ での連続性　$\displaystyle\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$

これらの共通することは，lim が入っているということである．高校時代はこれら lim の入った極限問題は計算問題として，極限値を求めることのみ，それらを解くことに終始してきた．**そしてほとんどの問題の特徴は与えられた式がすべて具体的な式でかかれていたことである．**

たとえば高校生に関数の極限の問題で「$f(x)$ が $x\to a$ としたとき，$f(a)$ に収束するのはどういうことがいえた場合か」というような本質的な問題はなかった．なぜならこれをきちんと答えるには，大学で学ぶイプシロンデルタ論法が必要だからである．たとえ答えられたとしても「x を限りなく a に近づけたら，$f(x)$ が限りなく $f(a)$ に近づくときをいうのです」と答えるだろうが,「それならその様子を式で表したらどうなるの」と聞いてみても，高校生はまず答えられないであろう．なぜなら，$f(x)$ が $x\to a$ としたとき，$f(x)\to f(a)$ となる保証を式で表すことを学んでないからである．こうした，数列や関数の極限の極限値の保証を式で表すのがイプシロンデルタ論法なのである．イプシロンデルタ論法を用いることによって，これら数列の極

限や関数の連続性まで同じ理論で述べることができ，収束するとはどういうことかがわかる．

それではたくさんの lim の入った極限問題のうち，**数列の極限にしぼって**イプシロンデルタ論法を考えていくことにしよう．

1.4　高校の教科書に掲載されている極限値の定義

高校で数列の極限を学ぶときに，数列 $\{x_n\}$ において，

$$n \to \infty \text{ のとき } (n \text{ を限りなきく大きくするとき}), \qquad x_n \to a$$

を

$$\lim_{x \to \infty} x_n = a$$

と表すということを学んだ．そして，x_n は a に**収束する**といって，a を数列 $\{x_n\}$ の**極限値**ということをいった．そして極限の練習問題をたくさん解いて，極限値を理解していった．たとえば次のような問題である．

1.5　高校の極限の問題の復習

数列 $\left\{ \dfrac{n}{n+1} \right\}$ の極限 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1}$ を求めよ．

【解答】

この問題は高校時代，受験をくぐり抜けてきた大学生ならばすぐ解ける問題で，いわば

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \dfrac{1}{n}} = 1$$

として極限値は 1 である．

この問題を解くとき，この数列の極限値の意味というよりも，**数列の第 n 項 (一般項) のみに注目して**極限値を求めた．意味を考えることはほとんどな

かったが，一応解説しておくことにする．与えられた数列 $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ は，

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots\right\}$$

という数列で，これが $n \to \infty$ とすると，**決して 1 にならなくとも 1 に限りなく近づいている**ということである．その 1 を数列 $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ の極限値ということである．その行き先は数列の一般項 x_n を計算すればよいということであった．このように，高校までの数列の極限は，一般項がまず与えられて極限値を求めることのみに終始してきた

しかし，具体的な一般項が与えられれば，計算しさえすれば，発散とか具体的な収束の値とかわかるわけであるが，それならば具体的な数列ではなくて，一般の数列 $\{x_n\}$ がたとえば a に収束するといえたとき，どのようなことが成り立っているのか (どのような性質をもっているのか)，どう数学的に表現するのか，式で表したらどのように表記されるのかということである．

これが高校生の答えであれば,「n を大きくしたら x_n は極限値 a になるときでしょう．つまり

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \tag{1-1}$$

が成り立つとき」と答えるかもしれないが，これは間違いである．なぜなら式（1-1）はあくまでも，

$$n \to \infty \text{ としたとき}, x_n \to a$$

という**文章を記号で表した**にすぎないし，収束する数列の特徴を表したものでもないからである．

だから**収束するということの保証を具体的な式でかけないか**ということが問題になる．**つまりどういうことがいえたときに収束しているといえるのか，高校の範囲では学んでいなかったのである．**

1.6 高校時代にあまり考えなかった数列の極限値

次のような 2 つの数列を考えよう．

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \cdots, \tag{1-2}$$

数列 (1-2) は，一般項が $\frac{1}{n}$ なので，$n \to \infty$ とすると，0 に収束するのは直感的に明らかで，高校時代は直感で答えとしてそれでよかった．これは，実は大問題？である．どこが大問題かというと,「明らかで直感で」で答えをそれでよしとしていることである．厳密さと論理を大事にする数学においてこのような態度でよいのであろうか．0 以外には収束しないという保証はどのように高校生は説明するのだろうか．ひょっとしたら 0 より大きい数に収束するかもしれないのである．

数列とは読んで字のごとく『数字の列したもの』であるから，高校時代考えなかったような (受験問題に出題されないような) 数列の極限も考えないといけないのである．高校時代までの数列は，等差数列や等比数列のように一般項を表すことのできる数列が主で，数字がランダムに並んだ数列などほとんど考えてこなかった．それに高校までの数列の極限値は，一般項に表すことにできる数列の極限値とその極限値の求め方を主に学んできた．つまり，数列の極限値のほんの一部分しか学習してこなかったのである．大学では，すべての数列の極限を式で保証することを学ぶ．それがイプシロンデルタ論法である．たとえば次のような数列の極限を考えよう．

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{6}, 1, \frac{1}{8}, 1, \frac{1}{10}, \cdots, \tag{1-3}$$

数列 (1-3) は 1 に収束するのか，0 に収束するのかわからない．だからこの数列は収束しないのだとなるのであろうが，これももちろん直感で述べているのである．**数学的な保証は全くされていないのである．**式などの数学的な保証がされてはじめて，収束したりとか発散したりとか収束しないなどを判断するのである．直感で述べていた極限値が高校数学の大きな欠点なので

ある (というより高校数学は直感での極限値の値をそれでよしとしてきた．もちろん，(1-3) のような数列の極限値を考えるようなことが少なかった)．

だからその大きな反省 (?) の上にたって，ゼロから収束する数列とか収束しない数列をきちっと数学的に表現しようと，大学 1 年の解析学の授業で，イプシロンデルタ論法を学ぶことになっている．がしかし，序論でも述べたように，イプシロンデルタショックという言葉があるように，最近の数学科ではほとんどやらないという噂も聞く．

これから，高校時代考えなかった数列まで収束する数列，収束しない数列を考えていくのであるが，数列のイプシロンデルタ論法を学ぶに当たって，

高校までは極限の問題といえば極限値を求めることのみに注目が集まっていたが，イプシロンデルタ論法では極限値を求めるのではなく，収束するとはどういうい う仕組みなのか，また収束する数列 (関数) の特徴はどういうものがあるかに興味がうつる．

ということを，イプシロンデルタ論法を学ぶ格言として，しっかり心にとめて学習する癖をつけよう．だから高校の数学の極限値の問題のように，いつまでも極限に関する問題は極限値を求めることであると思いこんでいたら大学の極限の問題はついていけなくなる．

『大学の数学 (主に数学科で学ぶ数学) は，式の仕組みを学ぶところである』

ということを肝に銘じておかなければならない．

以下，イメージを大事にしながら，高校受験数学に慣れ親しんだ人でも十分理解できるように解説していきたいと思う．

1.7　数列のイプシロンデルタ論法とは

数列のイプシロンデルタ論法を学ぶにあたって，次のことをまず最初に説明しておこう．本来ならば，イプシロンデルタ論法を説明してからまとめるものであるが，これから学ぶ人にとって，イプシロンデルタ論法とはどういうものかきちっと説明しておいた方が，より理解しやすくなることが間違いないと経験上思ったからである．

数列のイプシロンデルタ論法のまとめ

(1) **極限値を求めるものではなく，極限値はそれしかありえないと保証するものである．極限値がわかっていてはじめて使うものである(これが一番大事)**

(2) 極限値と数列の関係はどうなのであるか．つまり，数列 $\{x_n\}$ において，どういうことがいえたとき，収束したといえるのか (極限値と数列 x_n の関係はどうなっているのかということである) を保証するもの．

(3) 「n を限りなく大きくするとはどういうことか」とか「極限値に限りなく近づくということはどういうことか」とか「あらゆる近づき方」を説明できるもの

ということである．これは，何をいっているのかわからないかもしれないのは無理もないが，そしてまた数列のイプシロンデルタ論法とは何か，次のように考えるとよい．

そして，これらをさらにまとめた究極のいい方は，

数列のイプシロンデルタ論法とは，**収束する数列の特徴を式で表したものである．これは，n が大きくなれば，x_n が極限値 a に近づくことを式で表すということより，x_n が a に収束することがわかっている，これはどういう特徴があるだろうか，その特徴を式で表してみよう**

と考えるとよい．

そして，数列のイプシロンデルタ論法を理解するイメージとして，次のことを意識して収束する数列のイメージしよう．

私たちが高校時代学んだ数列の極限値は，一般項 x_n のみに注目して計算して，

$$x_n \to \alpha$$

というイメージしかなかったが，数列のイプシロンデルタを勉強するときは，図 1-1 のような x_n より先の項すべてをイメージするようにするとより

理解できるようになる．これらは以下説明していくので，いっている意味がわかってくると思う．

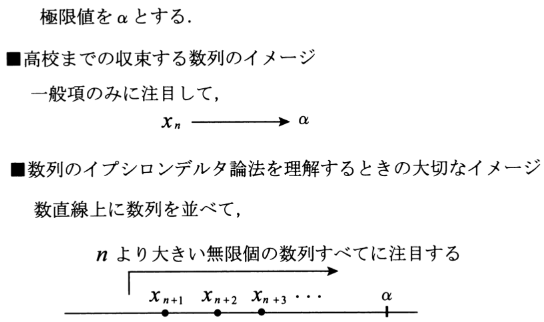


図 1-1 イプシロンデルタを使うための数列のイメージ

それでは具体例をもう一度あげてみよう．先に具体例としてあげた，無限数列の極限値

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-6n}{2n^2+5n-4}$$

について考えてみよう．これは大学受験をクリアした人にとっては簡単な問題で，**一般項のみに注目して**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-6n}{2n^2+5n-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{6}{n}}{2+\frac{5}{n}-\frac{4}{n^2}}=\frac{3}{2}$$

というように極限値を求める．これで終わっていた高校の極限値の問題を，数列のイプシロンデルタを理解するには図 1-1 で述べたような，図 1-2 のようにイメージを描かないといけない．つまり，$n=1,2,3,\cdots,100,\cdots$，と代入して数列の各項を数直線上に並べ，$n$ より大きい項すべてに注目するのである．

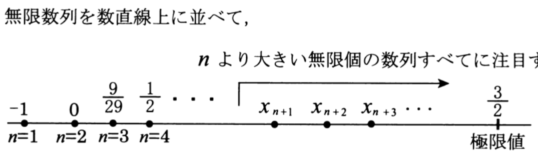


図 1-2　具体的な収束する無限数列のイメージ

だいぶん前置きが長くなったが，それではいよいよ，数列のイプシロンデルタ論法を解説していこうとしよう．

1.8　収束する数列の特徴とは

先にも述べたが，イプシロンデルタ論法は，極限 (収束すること) の保証である．収束する数列の特徴を式で表したものである．イプシロンデルタ論法を，きちんと式で表す前に，数列が収束するのはどういう特徴があるのかを解説して，その後に，式で表すことにしよう．

p.19 の数列 (1-2) と p.19 の (1-3) をイメージを大切にしながら考えよう．

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \cdots, \tag{1-2}$$

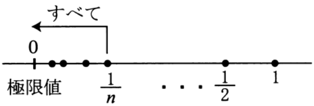
$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{6}, 1, \frac{1}{8}, 1, \frac{1}{10}, \cdots, \tag{1-3}$$

数列 (1-3) では，極限値を 0 と仮定すると，偶数だけ見ると 0 には近づいているが，$n = 1$ 億 1 や $n = 10$ 億 1 のときなど 1 億以上のものすごく大きい奇数に対しての数列はいっこうに 0 に近づく気配が全くないのは感覚的 (もちろんこの“感覚的”という表現は厳密でなく，しっかり数式で証明できないといけない) にわかる．しかしこれも感覚的にわかることだが，数列 (1-2) では極限値を 0 と仮定すると，偶数奇数問わず $n = 1$ 億 よりも $n = 10$ 億，$n = 10$ 億 よりも $n = 100$ 億 のほうがより 0 に近づいていることがわかる．とにかく自然数が増えるたびに 0 に近づいている．だから数列 (1-2) の $n \to \infty$ としてときの極限値は，0 であると断定しても間違いないであろう (高校時代はこの断定をそのまま正解としていた).

これら 2 つの感覚的な違いが，収束する数列とそうでない数列の違いなのである．これら 2 つの数列も十分大きな自然数に対して，仮定した極限値に近づいているものとそうでないものの 2 つがあることがわかる．高校数学のこの感覚的な直感で答えを出していることに対して反省し，この感覚的な直感を式で考えないといけないのである．もう一度収束する数列と収束しない数列の違いの特徴を考えるために，p.22 の図 1-1 の考え方を用いてこれらの数列について図にかいて考えてみよう．図にかくと，図 1-3 のようになる．

■無限数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$ を数直線に並べる．

n より大きい自然数に対応する無限個の数列の項すべては，極限値 0 の近くにある．



■無限数列 $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \cdots$ を数直線に並べる．

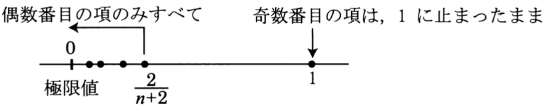


図 1-3　収束する数列としない数列のイメージ

図 1-3 を見てもわかるように，収束する数列は n より大きい自然数に対応する数列の項すべてが極限値の近くにある (近づいている)．しかし収束しない数列 (1-3) は，$n \to \infty$ にしても，偶数番目の項だけ 0 に近づいているが，奇数番目の項は 1 に止まったままで，0 に近づく気配が感じられない．つまり，**n より大きい自然数に対応する数列の項すべてが 0 に近づこうとしないのである** (0 の近くにないのである．偶数に対応する数列の項のみすべてが，0 の近くにあるということである)．これが収束する数列と収束しない数列の大きな違いなのである．

以上の流れから，$n \to \infty$ としたときの収束する数列とは，十分大きい n をとればとるほど，一般項 x_n と極限値 a の距離は非常に近くなっていくと

いうよりも，**第 n 項より先のすべての数列の項が極限値 a に近づいているということ (a の近くにあるということ)** である．つまり

> 収束する数列とは，十分大きい**自然数全て**に対応するすべての項が極限値の近くにある．

ということである (**とイメージすることができる**)．$n \to \infty$ としたときの収束する数列というのは，このイメージが全てであるといっても過言でない．これが非常に大事でこれを式で表現したものが，まさにイプシロンデルタ論法なのである．

だから $n \to \infty$ としたときの収束する数列は，一般項 x_n が極限値 a に近づくというよりも，

> 第 n 項より先の $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots,$ のすべての項と極限値 a の距離が近くにできる．

ということになる．何度も述べてきたが，高校時代の極限値は一般項の計算だけに注目してきたが，**数列のイプシロンデルタ論法を考えるときは，一般項 (第 n 項) より先の項すべてを意識しないといけないのである．**

ここまでで，収束する数列としない数列のイメージができたであろうか．実はまだまだ終わりではない．さらに，いままでの議論で次のような疑問がわく．

(1) n 番目より先の項すべてというが，何番目より先の項すべてが，極限値の近くにあったらいいのか．

(2) n 番目より先の項すべては，どの程度極限値の近くにあったらいいのかということである．

これらを解決することによって，n を大きくすればするほど，極限値に近づいていくというイメージを式に含ませることができるのである．つまり，n を大きくすればするほど，n 番目より先の項すべてが極限値にどんどん近

づくことができるよということの意味も式で与えることができるのである．そしてはじめて，数列のイプシロンデルタ論法が完成するわけである．

これらを解決する前に，いままで使ってきた,「大きい」とか「近い」というような言葉を数学的にきちんと定義しないといけない．よく考えてみよう.「十分大きい」とはいくら以上が大きいといえるのだろうか．いくら以上であればよいのだろうか．また同様に「近くにある」というのはどれくらいの近さをいえばよいのだろうかということである．次に解説しよう．

1.8.1　近さ，数の大きさの感覚

自分たちはどれくらいの数が大きいと感じるだろうか．もし小学生が 1000 円を持っていれば大金と感じるし，サラリーマンが 1000 円の小遣いといわれれば少なすぎると感じるであろう．とにかく数の大きさの感覚は本人によって違うし，大きい，小さいには客観性はないのである．また日本では世間一般に一番大きい数が無量大数といわれているが，これは 10^{68} を表していることが常識とされている (Wikipedia より)．日常生活では無量大数という数字は使うわけもなく，新聞などにも登場しない．しかし，数学を勉強している身にとってみれば，実際には使わなくても 10^{68} より大きい数はいくらでも大きい数を思い浮かべることができる．つまり無量大数といわれても，$10^{1000\text{兆}}$ に比べれば十分小さい数字なのであるし，またいくらでも大きな数字も思い浮かべることができる．

もちろん「近い」とか「遠い」も本人の主観である．どのくらいが，距離が近いといえるのだろか？　1cm?，それとも 10m？，それとも 100km？近いとか遠いとかは，これも客観性はなく主観である．新婚ホヤホヤの夫婦にとっては仕事で 10km 離れていても遠いと感じるであろうし，また通勤距離が 10km であればものすごく近いと感じるであろう．もう一度いうが，同じ数字でも人によって感覚が全く違うのである．つまり具体的な数字で，近さを客観的に考えることは不可能である．

こういう主観というものを厳密な数学の議論では嫌う．だからこの「大きい」とか「小さい」という言葉の言い換えを考えないといけないのであるが，その置き換えの言葉は**「任意の」**という言葉である．大学の数学では「任意

の」という言葉をよく用いるが，それは

任意の＝すべての

と置き換えて読めばよい．この置き換えはイメージを重視して理解する上で非常に大事である．イプシロンデルタ論法では，この「大きい」とか「小さい」という言葉の代わりに**「任意の」**という言葉を用いる．以下イプシロンデルタ論法の例題を考えることで，**「任意の」**という言葉に慣れよう．また数学では**「任意の」**という言葉を記号で

$$「任意の」= \forall$$

で表す．

以上で，イプシロンデルタ論法を使って，収束する数列の準備ができた．ところでイプシロンデルタ論法は ε(イプシロン) と δ(デルタ) を使うのでイプシロンデルタ論法といわれるのであるが，数列の極限値を考えるときは $n \to \infty$ の場合が多く，この場合は ε(イプシロン) と m を使うので $\varepsilon - m$ 論法といわれるが，考え方はほとんど同じである．以下，イプシロンデルタ論法という言葉を使わずに，$\varepsilon - m$ 論法という言葉で数列の極限を解説し，きちんと定義していくことにしよう．

1.9　$\varepsilon - m$ 論法の定義の前に

さてどの程度，n より大きい自然数に対応する数列の項すべて x_{n+1}, $x_{n+2}, \cdots$ が a の近くにあるばよいかというと，$n \to \infty$ としたときの $\{x_n\}$ が a に収束するということだから，さらには次のような意味をもたせないといけない．

収束するというのは，極限値にいくらでも近づけることができる

ということである．そしてこれらの意味を式によって表すことである．

これは，次のように考える．$x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots$ が極限値にいくらでも近づけることができるということは，

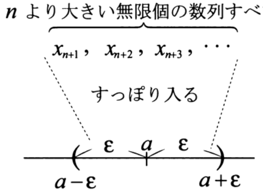
$x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots$ と a の距離が非常に近くできる (いくらでも小さくできる)

ということである.

つまり,

$$x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \cdots \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \tag{1-4}$$

で，ε を小さくしていっても，必ずある数より大きい自然数に対応する数列のすべてが，$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ の中に入る (そんな数列の項が存在する) ということである (図 1-4 参照).



収束する数列とは，ε をどんなに小さくしても，ある数より大きい全ての自然数に対応する数列の項が必ず，$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ にすっぽり入るという特徴をもつ．つまり，どんなに小さい ε をとっても，必ずある数より大きい全ての自然数に対応する数列の項が $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ の中にすっぽり入るということである.

図 1-4　収束のイメージ図

ここで注意することは，無限個の数列の項が $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ の中にすっぽり入るといういい方は間違いである．なぜなら，偶数に対応する無限個の数列の項だけすっぽり入っても収束することがいえないことは，p.24 の図 1-3 でも述べたとおりである．大事なことは**ある数より大きい自然数に対応するすべての数列の項**というところがポイントである．また何個以上 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ の中にすっぽり入るかが問題ではなくて (無限個だから 1 個や 2 個違っても全く問題がないし，全く同じ無限個である)，ε の大きさによって $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ に入る数列の項が決まってくるということである.

この考えを，式で表したのが数列のイプシロンデルタ論法である．しかしこれらの内容を式で表したものをいきなり紹介すると初心者は勘違いがおこる可能性があるので，しっかり解説しよう.

式 (1-4) を別の形の式で表すのであるが，これは距離 (絶対値) を使って考える．絶対値を使って表すと次のようになる．

x_n と a の距離は $|x_n - a|$ で与えられるから，**十分大きい自然数 n より大きい全てに対応する x_n が**，∀(**任意の**)ε に対して，

$$|x_n - a| < \varepsilon \tag{1-5}$$

を満たすということである．

数列のイプシロンデルタ論法を最初みたときに，勘違いしやすいのは $|x_n - a| < \varepsilon$ ばかりに目がいき，一般項 x_n と極限値の距離がいくらでも小さくできるというイメージをもってしまうことである．

そうではなく，ここで見落としてはいけないのは，**ある数より大きいすべての自然数 n 対応する数列の項 x_n すべてが**という部分である．これらの**ある数より大きいすべての自然数 n 対応する数列の項 x_n すべてが**，$|x_n - a| < \varepsilon$ を満たすということで，これは，∀(**任意の**)ε に対して，

$$
\begin{gathered}
|x_{n+1} - a| < \varepsilon \\
|x_{n+2} - a| < \varepsilon \\
|x_{n+3} - a| < \varepsilon \\
\vdots
\end{gathered}
$$

ということである．つまり，任意の ε に対して，x_n より先の項すべてで

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

を満たしていればよい．もっとわかりやすくいうと，ε が任意ということだから,「任意の」の部分を,「どんなに小さくとっても」と置き換えて読むとわかりやすい．つまり，どんなに小さく $\varepsilon > 0$ をとっても，ある数より先の自然数に対応するすべての項 $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots$ が，

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

を満たしていればよいのである (もう一度，図 1-4 をみて整理してみよう)．

> 「ある数より大きいすべての自然数 n に対応する数列の項 x_n すべてが」と $|x_n - a| < \varepsilon$ は常にワンセット

という理解はきちんともっておこう．もう一度確認するが，x_n と極限値の距離がいくらでも小さくできるという意味ではないことに注意しておこう．

さて，何番目より先の項すべてが極限値の近くにあったらいいのか？という疑問がわくが，これは，ε の数字によって決まっていくのである．ここで，だんだん抽象的になってきたので，1 つ具体的な例を解説して，いままでの議論・解説をもう一度整理してみよう．

1.9.1　$\varepsilon - m$ 論法の定義のイメージ理解の具体例

数列 $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ の極限値は 1 であったが，本当に 1 に収束するのか，収束する数列の特徴が成り立っているのか確かめてみよう．これには，p.29 の式 (1-5) に当てはめて考えると，

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

となる．ここで，$\forall\varepsilon > 0$ に対して (つまりどんな小さな ε に対しても)

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \tag{1-6}$$

とできる十分大きい自然数 n の**全て**に対応する数列が (1-6) を満たすことがいえればよい．

ε が任意の (すべての) ということは，$\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001, \cdots$ といくらでも小さくでき (もちろんこの“小さい”という言葉は主観である)，収束する保証として，ある数より大きい自然数**すべて**に対応する数列の項すべてが，式 (1-6) を満たしていればよいのである．これはまた，「ある数より大きい自然数**すべて**に対応する数列の項すべて」と極限値がいくらでも近づけることができる (近くにあるようにできる) ということである．

そして，ある数より大きい自然数すべて，つまりどれくらいから先の自然数に対応する数列の項を考えればよいかというと，

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{n}$$

なので，$\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ として，

$$n > \frac{1}{\varepsilon} = m$$

と m をとればよいと考えればよいのである．

それでは具体的な数字でみていこう．

$\varepsilon = 0.1$ のときは，$n > \dfrac{1}{0.1} = 10$ を満たす n(**全て**) に対応する数列の項すべては，$\dfrac{n}{n+1}$ と 1 の距離が 0.1 よりも小さい．

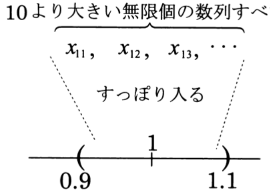


図 1-5　$\varepsilon = 0.1$ のとき

$\varepsilon = 0.01$ のときは，$n > \dfrac{1}{0.01} = 100$ を満たす n に対応する数列の項すべては $\dfrac{n}{n+1}$ と 1 の距離が 0.01 よりも小さい．

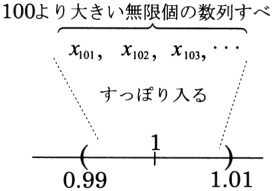


図 1-6　$\varepsilon = 0.01$ のとき

$\varepsilon = 0.001$ のときは，$n > \dfrac{1}{0.001} = 1000$ を満たす n(**全て**) に対応する数列

の項すべては $\dfrac{n}{n+1}$ と 1 の距離が 0.001 よりも小さい．

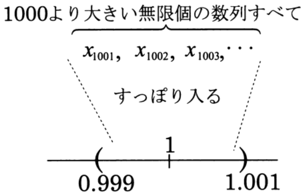


図 1-7　$\varepsilon = 0.001$ のとき

というように，$\dfrac{n}{n+1}$ より先の数列の項すべてと 1 の距離がいくらでも小さくできる (つまり $\dfrac{n}{n+1}$ より先の数列の項すべてと 1 がいくらでも近づくことができるということ) という概念を与えることができる．

そして，どんなに $\varepsilon > 0$ を小さくとっても,「ある数より先の自然数に対応する数列の項すべて」と「極限値」がの距離をいくらでも小さくしても，その距離に応じて数を決めれば，それから先の自然数に対応する数列の項すべては，極限値の近くにもっていくことができるということである．これが，収束する数列の特徴であり，それができれば数列が収束するということが保証できるのである．これらを式で表したのが，まさに $\varepsilon - m$ 論法なのである．

この具体例の場合，どんなに $\varepsilon > 0$ を小さくとっても，ε に対してある数を決めることができて，それより大きな全ての自然数 n に対応する数列の項が必ず $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ の中にすっぽり入るので，$\dfrac{n}{n+1}$ は 1 に収束するということであるということが，誰の目にも疑いもなく証明できたということなのである．

かなり前置きが長くなった．いよいよ $\varepsilon - m$ 論法の定義をきちんとすることにしよう．

1.10 $\varepsilon - m$ 論法の定義

$\varepsilon - m$ 論法とは，収束する数列の特徴を生かし，それを式で表したものであるということを，まず再確認しておこう．

$n \to \infty$ としたとき，$x_n \to a$(極限値) になるということがわかっているとき，どんなことがいえたのか．それを式で表していくのである．

x_n が a に収束するとき,「ある番号」から先の自然数に対応する数列の項 $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots$，すべてが a の近くにあるということで，何番から先の数列の項すべてが a の近くにあればよかったかというと，それは $\varepsilon > 0$ の数字の取り方に決まっていた．つまり，$\varepsilon > 0$ を決めることによって，
$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ の中に，ある番号から先の自然数に対応する数列の項すべてが，すっぽりはみ出さずに入れることができるようなスタートライン「ある番号」を決めることができたのである (これは先ほどの，p.30 の節 1.9.1 をもう一度参照してみよう)．どんなに $\varepsilon > 0$ を小さくとっても，ある番号から先の自然数に対応する数列の項 $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots$，すべてが $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ の中に入れることができるというのは，つまり，x_n より先の数列の項すべてと a の距離をいくらでも小さくできる (近づけることができる) という意味を与えているということを確認しておこう (大事なことは，x_n と a の距離がいくらでも小さくできるということではなく，x_n より先の数列の項すべてと a の距離をいくらでも小さくできるということである (近づくことができる))．これは，逆にいうと，x_n が a に収束するとわかっているとき，「$n \to \infty$ としたとき」とは「十分大きい (この大きいとはもちろん主観である)n に対応するすべての数列の項を考える」ということで，そのすべての数列の項は，いくらでも極限値に近づけることができるということである．

以上で準備ができた．これらの内容を式で表してみよう．$n \to \infty$ としたとき，$x_n \to a$(収束値) となることを保証するには，

どんなに $\varepsilon > 0$ を小さく (小さいというのは主観である) とっても ($\varepsilon > 0$ を任意にとってきても)，考える ε の数字によって,「ある番号」が決まり,「ある番号」から先の自然数に対応するすべての数列の項は, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ の中にすっぽり入れることが必ずできるということである.

これを，少し数式を増やして表すと，

任意の ε に対して，ある数 m がとれ，$n > m$ を満たす自然数 n に対応する全ての数列の項 x_n は，$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ の中にすっぽり入れることが必ずできる．つまり，$x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ とできる.

となる．ここで，$n > m$ を満たす自然数 n に対応する全ての数列の項 x_n は，$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ の中にすっぽり入るという表現は，先にも述べたが，つまり，任意の ε に対して，x_n(もちろん n は「ある番号」m より大きい自然数) より先の項すべて $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots$ が

$$\begin{aligned} |x_n - a| &< \varepsilon \\ |x_{n+1} - a| &< \varepsilon \\ |x_{n+2} - a| &< \varepsilon \\ &\vdots \end{aligned}$$

ということと同じでこれを簡潔にまとめてかくと，さらに

任意の ε に対して，ある数 m がとれ，$n > m$ を満たす自然数 n に対応する全ての数列の項 x_n は，$|x_n - a| < \varepsilon$ を満たす.

とかき直すことができる．これがまさに $\varepsilon - m$ 論法で，これをより $\varepsilon - m$ 論法の純粋な数学的表現で表すと $\varepsilon - m$ 論法は完成である.

$\varepsilon - m$ 論法で用いられる数学の記号のみで表すと次のようになる.『任意の』という記号は $\forall$ で,『ある』という記号は $\exists$ という記号を使うことに注意して，

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists m, \quad \forall n > m \quad : |x_n - a| < \varepsilon \tag{1-7}$$

となる．もう 1 度述べるが，最初この定義式を見たとき，一般項 x_n のみが任意の $\varepsilon > 0$ に対して $|x_n - a| < \varepsilon$ とすることができる，つまり一般項 x_n のみが極限値 a いくらでも近づくことができると勘違いする場合がある．よく式を見てみよう．$\forall n > m$ の部分を見落とさないように注意すること．m より大きいすべての自然数 n に対応する $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots$ が，$|x_n - a| < \varepsilon$，$|x_{n+1} - a| < \varepsilon$，$|x_{n+2} - a| < \varepsilon$，$\cdots$ を満たしているということである．つまり，$\forall n > m$ と $|x_n - a| < \varepsilon$ はワンセットである．これら $\varepsilon - m$ 論法を，数学の記号で表した場合，初心者にはこのことがなかなか伝わらないでいる．式の意味をしっかり考えるようにしよう．

そして,「ある数」m は，いままでみてきたように，$\varepsilon > 0$ の取り方によって決まるので，m を ε の関数とみたてて，

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists m(\varepsilon), \quad \forall n > m(\varepsilon) \quad : |x_n - a| < \varepsilon \tag{1-8}$$

と，$\varepsilon - m$ 論法を表す本もある．

これで，$\varepsilon - m$ 論法が完成したが，最後は文章から数学の記号の式と一気に飛躍した感は否定できないが，しっかりいままでの内容が理解できていれば，この式のいっている意味も全く難しくはないであろう．もう一度確認しておくが，最後の $|x_n - a| < \varepsilon$ の式の部分であるが，x_n と極限値 a の距離がいくらでも小さくできるといく意味ではなくて,「ある番号」m より大きい自然数に対応する数列の項 $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots$ すべてが，いくらでも極限値 a といくらでも小さくできるということであるし，そんな数列の項 $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots$ すべてが存在するということである．

ちなみに，

$$\forall\varepsilon > 0, \exists m, \forall n > m$$

の部分であるが，**この並びの順番は非常に大切で入れ替えてはいけないということであることに注意しないといけない．**

いきなり $\varepsilon - m$ 論法をこれで表現されては大学新入生がとまどってしまう

のも無理がない．式の意味をきちんと解読して本質を理解しておかないと，たとえば，$|x_n - a| < \varepsilon$ の部分で，ε は任意であるから，いくらでも一般項 x_n のみに注目して，x_n と a の距離をいくらでも近づけることができると勘違いする場合が出てくる．あくまでも x_n より先のすべての数列のすべての項と a がいくらでも近づけることができるということであることはいままで述べたとおりである (もう一度，p.28 の図 1-4 をイメージしておこう).

結局大事なことは，

> **$\varepsilon - m$ 論法を記号で表そうが，収束する数列の特徴に置き換えて考えることができるか**

ということである．つまり記号にひるむことなく，ただ単純に自分で今まで解説したようなイメージで収束を考えていけばよいだけで，ただそれを単純な記号で表しているだけと考えるべきである.

それでは実際に，収束する数列を $\varepsilon - m$ 論法を用いて解説していくことにしよう.

1.11　$\varepsilon - m$ 論法を使った練習問題

1.11.1　数列の極限値

数列 $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ の極限値は 1 である.

【解答】

実際に p.30 の節 1.9.1 にあげた数列の問題を，$\varepsilon - m$ 論法で，数学的なきちんとした表現で表して証明してみよう.

極限値が 1 と予想できるので，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon \tag{1-9}$$

として，最後の不等式を解いて，

$$n > \frac{1}{\varepsilon} = m$$

となる m をとると，$\forall\varepsilon > 0, n > m\left(=\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$ を満たす自然数 n に対応する数列の項すべては，$\left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$ を満たす．

よって，$\dfrac{n}{n+1}$ は 1 に収束する．

となるのである．これを $\varepsilon - m$ 論法の記号のみで解答すると次のようになる．

極限値が 1 と予想できるので，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

として，最後の不等式を解いて，

$$n > \frac{1}{\varepsilon} = m$$

となる m をとると，つまり，

$$\forall\varepsilon > 0, \exists m = \frac{1}{\varepsilon}, \forall n > m, \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$$

を満たすとなるので，$\dfrac{n}{n+1}$ は 1 に収束する．

コメント

ここで，式 (1-9) のところで，$\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ としたが，別に，$\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$ として，

$$n > m\left(= \frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$$

「ある番号」m を選んでもよい．どうして，式 (1-9) のようにして，m を決めたかというと，別に意味はない．ただ，$\varepsilon > 0$ は任意であるから，$\varepsilon = 1000$ としたときに，$m = \dfrac{1}{1000} - 1 = -0.999$ と負の数になり，不安？を与えると思ったからである．別に，m は負の数でもいいのである．この場合 $n > -0.999$ を満たすすべての自然数，この場合は n はす

べての自然数となり，$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対応するすべての数列の項は，$\left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$ を満たすのである．

もう一度確認しておくが，

また任意の $\varepsilon > 0$ という部分は，すべての $\varepsilon > 0$ という意味だから，『ε をどんなに大きくとってもとか』，『ε をどんなに小さくとってもとか』に置き換えて考えると (読むと)，少しは極限のイメージが湧きやすい

ということである．以下この表現に置き換えて使っていくことにしよう．

1.11.2　数列の極限値

$$n \to \infty \text{ としたときの } \frac{(-1)^n}{n} \text{ の極限値は } 0 \text{ である．} \tag{1-10}$$

【解説】

高校の教科書にも載っていた $\dfrac{(-1)^n}{n}$ という数列の $n \to \infty$ としたときの極限値は 0 であるが，これも振動しながら 0 に近づいていく．振動するから収束しないというのではなく，高校生の答えであれば振動しても明らかに 0 に近づいていっているので，極限値は 0 であると感覚で答え，これでも高校時代は間違いなかった．これを $\varepsilon - m$ 論法を使って，きちっと 0 に収束することを証明しよう．

【解答】

極限値が 0 と予想できるので，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

として，最後の不等式を解いて，

$$n > \frac{1}{\varepsilon} = m$$

となる m をとると，

$$\forall\varepsilon > 0, n > \frac{1}{\varepsilon} = m \text{ を満たす全ての自然数 } n \text{ は，} \left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon \text{を満たす．}$$

よって，$\dfrac{(-1)^n}{n}$ は 0 に収束する．

これを記号のみでかくと，次のようになる．極限値が 0 と予想できるので，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

として，最後の不等式を解いて，

$$n > \frac{1}{\varepsilon} = m$$

となる m をとると，つまり，

$$\forall\varepsilon > 0, \exists m = \frac{1}{\varepsilon}, \forall n > m, \left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon \text{を満たす．}$$

となるので，$\dfrac{(-1)^n}{n}$ は 0 に収束する．

もう一度いおう．数列とは数を列したもので，高校時代に学んだ等差数列，等比数列など一般項がきちっと表せるものだけが数列ではないのである．高校時代は数列のほんの一部だけを学習してきたのである．以下，高校時代にあつかったような一般項で表される数列の極限値にこだわらず，ただ数を列した数列の極限値にこだわって解説していこう．

1.11.3　数列の極限値

数列　$\{a_n\} = \left\{ \underset{a_1}{\overset{\|}{1}}, \underset{a_2}{\overset{\|}{1}}, \underset{a_3}{\overset{\|}{1}}, \underset{a_4}{\overset{\|}{1}}, \cdots \right\}$　の極限値は 1 である．　(1-11)

【解説】

こんな当たり前のことを証明しろといわれて，明らかみたまんま，各項は 1 しかないのであるから，1 に収束するに決まっているだろうと思うのがほとんどである．ちなみに，一般項は $a_n = 1$ で，この数列の極限値は 1 であるということは，高校の数学の教科書に紹介されている．まさに直感に頼って極限値を求めていたのが高校の範囲なのである．この明らかなものを証明するのが，大学の数学で学ぶイプシロンデルタ論法の本質なのである．この証明は高校の範囲では無理である．

それでは証明に入ろう．

【証明】

極限値を 1 と**予想する**．$\forall\varepsilon > 0$ に対して (どんなに小さい $\varepsilon > 0$ をとっても)，$m = 1$ として m をとると，

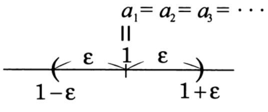
$$n > 1(= m) \text{ を満たす全ての自然数に対して，} |a_n - 1|(= |1 - 1| = 0) < \varepsilon$$

がいえるので，a_n は 1 に収束するのである．

これを $\varepsilon - m$ 論法の論理記号のみで表して証明してみよう．

$$\forall\varepsilon > 0, \qquad \exists m = 0, \qquad \forall n > m \quad : |a_n - 1| < \varepsilon$$

とかけるから，a_n は 1 に収束する，となる．



ε をどんなに小さくしても，全ての自然数に対応する数列の項すべてが必ず，(1−ε, 1+ε) にすっぽり入る．

図 1-8　1 に収束するイメージ

【注意】

ここで注意することがある．m の選び方であるが，上記の問題の場合，$m = -10$(敢えて，m を負の数にする必要はない．なぜなら n は必ず自然数なので,「ある数」m の出発点はどんなに小さくても 0 とするべきだし，m が負の数を使うのは意味がないことである) でもよいし，$m = 100$ でもよいし，$m = 78690334$ でもよいし，$m = 1$ 兆 5678490332 でもよいのである．ようは，収束するということを証明するには，どんなに小さい $\varepsilon > 0$ をとっても，**「ある数」より大きい自然数全て**に対応する a_n すべてが，

$$|a_n - 1| < \varepsilon$$

を満たすことを示せばよいのである ($(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ の中にすっぽり入れることができればよいのである)．とにかく,「ある数」より大きい無限個の自然数に対応する数列の項すべてに興味があるのであって，その「ある数」のスタートは，どこから出発してもいいということである．

1.11.4 数列の極限値

$$\text{数列} \quad \{b_n\} = \Big\{\underset{\substack{\| \\ b_1}}{1}, \underset{\substack{\| \\ b_2}}{\frac{1}{2}}, \underset{\substack{\| \\ b_3}}{3}, \underset{\substack{\| \\ b_4}}{\frac{4}{5}}, \underset{\substack{\| \\ b_5}}{5}, \underset{\substack{\| \\ b_6}}{5}, \underset{\substack{\| \\ b_7}}{5}, \cdots\Big\} \quad \text{の極限値は 5 である．} \tag{1-12}$$

【解説】

このような数列の極限値などは，ほとんど高校の範囲で考えなかった．なんとなく，5 に収束するように思われるが，第 4 項までは振動をしている．第 4 項まで見たらとてもでないが 5 に収束しているようには思えない．この数列の極限値を本当に 5 にしてもいいのであろうか．これを保証するのもまさに $\varepsilon - m$ 論法なのである．つまり $\varepsilon - m$ 論法で，収束の条件が成り立てば，この数列は 5(今の段階ではあくまでも予想値である) に収束しているといえるのである．それでは証明をしてみることにしよう．

【証明】

$\forall\varepsilon > 0$ に対して，$m = 4$ とすると，

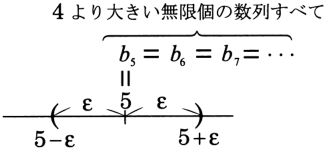
$n > 4$ を満たす全ての自然数 n に対して，　$|b_n - 5|(= |5-5| = 0) < \varepsilon$

とできるので，b_n は 5 に収束する．

これを $\varepsilon - m$ 論法の論理記号のみで表して解答すると次のようになる．

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists m = 4, \quad \forall n > m \quad : \quad |b_n - 5| < \varepsilon$$

とかけるから，b_n は 5 に収束する，となる．



ε をどんなに小さくしても，4より大きいすべての自然数に対応する
数列の項すべてが必ず，($5-\varepsilon, 5+\varepsilon$)にすっぽり入る．

図 1-9

以上証明をしたわけだが，もう一度深くこの数列の極限について考えよう．

【補足】

$\varepsilon > 0$ が任意ということで (つまりどんなに小さい ε をとってよいということで),

$$|b_3 - 5| = |3 - 5| < \varepsilon = 0.5$$

と $n = 3$ は満たしていないのではないかとふと疑問に思うふしがあるかもしれないが，これは定義の理解に関する勘違いである．これを説明しよう．

$$|b_3 - 5| = |3 - 5| < \varepsilon = 0.5$$

であるが，大事なことは収束するというのは，**ある数より大きい自然数全て**に対応する b_n が，$|b_3 - 5| < 0.5$ を満たしていればよいのである．

つまり，**数列の項が 1 つや 2 つ任意の** $\varepsilon > 0$ **に当てはまらない場合は，自分で考えてより大きなある** m **をとれば，完全に** $\forall\varepsilon > 0$ **に対して，**$(5-\varepsilon, 5+\varepsilon)$ **にすっぽり入るということである．**

つまり，十分大きい自然数 n 全てに対応する b_n が，

$$|b_n - 5| < \varepsilon = 0.5$$

満たすかということで，それは $n > 4(= m$ とすればよい$)$ を満たす自然数 n 全てがに対応する b_n はすべて満たす，ということである．別にここで，$m = 4$ としなくても，$m = 10$ でも，$m = 100$ でも，$m = 10598$ でもよいのである．とにかく $\forall\varepsilon > 0$ に対して，m より大きい**全ての**自然数 n に対応する b_n が必ず $|b_n - 5| < \varepsilon = 0.5$ を満たせるものがとれればよいのである．

だからどんな $\varepsilon > 0$ をとっても，ある一定以上の自然数 n 全てに対しては (つまり，必ず $n > m$ を満たす m が存在して) $\varepsilon > 0$ 以内におさまるということである．

この数列の場合は，$\varepsilon = 100, 50, 6, 0.5, 0.1, 0.001, 0.000001, \cdots$ のどれをとろうが，$n > 4(= m$ とする$)$ をとれば必ず，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$|b_n - 5| < \varepsilon$$

とできるので，b_n は 5 に収束するといえるのである．

このように収束するときは，$n = 1, 2, 3, 4$ に対しては b_n は 5 に近づいている様子などみじんも感じられない．つまり，収束するときは $n = 1$ からしっかり収束する値に近づいていかなくてもよいというわけである．だからもちろん，

$$\text{数列 } \{x_n\} = \begin{cases} (-1)^n & (n \leqq 1 \text{ 兆}) \\ 8 & (n > 1 \text{ 兆}) \end{cases}$$

は 8 に収束する数列なのである．証明はここまで理解した人であれば，ものすごく簡単なので自分で証明をしてみよう．**収束する数列の証明で必要なものは，いくらでも思いつく「ある数」m ではなく，それから先の自然数すべてに対応する無限個の数列の項なのである．だから，有限個の数列の項などどう振る舞っていても，有限個内で一般項で表せていないランダムな数の列があっても，それから先の無限個の数列の項が収束すれば，収束する数列なのである．**

m のとりかたであるが，p.35 で説明したように，m は ε によって決まるので ε の関数という表しで $m(\varepsilon)$ と表したが，以上みてきたように，

ε に対して，m は 1.11.1 や 1.11.2 のように ε に連動するものもあれば (ε の関数になるものあれば)，1.11.3 や 1.11.4 のように連動しない ((ε の関数にならない) 定数のものもある．

ということである．そしてまた，

m は負の数でもかまわないのであるが，数列で考えるのは $n = 1, 2$ $, 3, \cdots$ と自然数のみである．$n > m$ を満たす自然数 n を考えるので，$m < 0$ のときを考えても，$m = 0$ のときを考えても，$n > m$ を満たす自然数 n は $n = 1, 2, 3, \cdots$ となるので，この本では，$m \geqq 0$ とする．しかも m は小数や分数でもかまわない．

最後に収束しない数列を紹介することにしよう．

1.11.5 収束しない数列 $x_n = (-1)^n$

$$n \to \infty \text{ としたとき}, x_n = (-1)^n \text{は収束しない数列である．} \tag{1-13}$$

【解説】

この数列は，先にも紹介したように高校の範囲でも登場する収束しない数列である．詳しくかくと

$$\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, \cdots\}$$

と，無限に続く数列を思いえがかないといけない (しかも，絶対値を使って $\varepsilon - m$ 論法を述べるので，数直線上にあるというイメージも必要である)．

これは振動して収束しない数列であることを，高校の範囲で直感的に学んできた．これは明らかに振動するので収束しないといわれても，それなら証明してみてといわれても，高校の範囲ではきちっと証明できない．明らかとか直感的にという言葉は，数学では御法度である．きちっと数式を使って証明してみよう．

いくらでも小さくできる $\varepsilon > 0$ に対して (つまり，任意の $\varepsilon > 0$ に対して)，

$|x_n - a| < \varepsilon$ とできる「ある数」m が存在して，m より大きい自然数 n **全て**に対応する数列の項 x_n が，この不等式を満たすかということであるが，ここでもう一度注意しておこう．

x_n より先の数列の項すべてと a の距離がいくらでも小さくできるということで，

$$|x_n - a| < 0.01$$

とか

$$|x_n - a| < 0.00001$$

というできる n が **1 つ**でもとれればいいかというとそうではなかった．ε によって決まる「ある数」m より大きい**全ての**自然数 n に対応するすべての数列の項 x_n が，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，$|x_n - a| < \varepsilon$ を満たさないといけない．

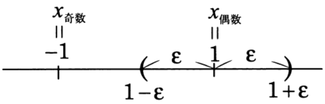
まずは収束しないことを簡単にイメージを大切にしながら解説してみよう．というより，収束しない数列のイメージは，p.19 の (1-3) と p.24 の図 1-3 で述べたので，それを参考にしながら，以下考えていくとよい．ただそのイメージを今回は，$\varepsilon - m$ 論法を用いて式で表し考えるだけである．

もし収束するとして，たとえば極限値を 1 と仮定すると，$\varepsilon > 0$ は任意であるから，$\varepsilon = 0.00000001$ に対しても成り立たないといけない．つまり，

$$|x_n - 1| = |(-1)^n - 1| < 0.00000001 \tag{1-14}$$

とできるかというと，たとえば，ものすごく大きい自然数には成立するだろうと予想して $\varepsilon = 0.00000001$ に対して，「ある数」$m = 100000000$ を考えよう．$m = 100000000$ から先の自然数すべてに対応する数列の項すべてには成り立つだろうを考えても，$n > 100000000$ を満たす偶数に対応する数列の項すべては，式 (1-14) を満たすが，奇数のとき，たとえば $n = 100000001$ のときは成り立たない．つまりどんなに小さな数をとったとしても (この小さいというのはもちろん主観である)，どんな「ある数」m をとっても，$n > m$ を満たすすべての自然数 n で，式 (1-14) を満たす n がとれると同時に，とれないものも**必ず**存在することは簡単に想像できる．これはいくらでも $x_n = (-1)^n$ と 1 が近づくことができない．つまり，これは「ある数」m

から先のすべての自然数に対応する数列の項すべてと極限値をいくらでも縮めることができないことをいっている (図 1-10 参照).



ε をどんなに小さくしても，(1−ε, 1+ε) に
すっぽり入るものと，入らないものが必ず存在する．

図 1-10

もちろん同様にして，極限値を −1 と仮定しても同様に，(いくらでも小さくできる) **任意の** $\varepsilon > 0$ に対して,「ある数」m を見つけ,

$$|x_n - (-1)| = |(-1)^n - (-1)| < \varepsilon$$

を満たす,「ある数」m から先のすべての自然数に対応する数列の項すべては存在しないことは直感的に明らかである．もう普通の人なら，この数列が 1 と −1 しかとらないのだから，これで証明できたと思うかもしれないが，これは違う．ひょっとしたらほかの実数に収束するかもしれないから，どんな実数でも収束しないということを証明しないといけないのである．収束しない証明はここまでやらないといけないのである．

それではこの数列が収束しないことを直感的でなく，きちんと数式を使って数学的に証明してみよう．

【証明】

背理法で証明しよう．この数列が a に収束したとしよう．つまり任意の (どんなに小さい)ε に対しても，ある m をとれて $n > m$ を満たす自然数 n 全て (十分大きい n 全て) に対応する x_n すべては

$$|x_n - a| = |(-1)^n - a| < \varepsilon$$

を満たす．よって，どんなに小さい $\varepsilon > 0$ をとっても必ずある一定以上の全ての自然数 n に対応する x_n が，$|x_n - a| = |(-1)^n - a| < \varepsilon$ を満たすという

ことである．$2n+1>2n>n>m$ が成り立つから，つまり m より大きい奇数や偶数に対して，十分大きい (m より大きい) 全ての奇数 $2n+1$ に対しても，

$$|x_n - a| = |(-1)^{2n+1} - a| < \varepsilon \tag{1-15}$$

が成り立つし，十分大きい (m より大きい) 全ての偶数 $2n$ に対しても，

$$|x_n - a| = |(-1)^{2n} - a| < \varepsilon \tag{1-16}$$

ということである．つまり，任意の (どんなに小さい)ε に対しても，(1-15) より，

$$|-1-a| = |a+1| < \varepsilon$$

が成り立つし，(1-16) より，

$$|1-a| = |a-1| < \varepsilon$$

が成り立つ．つまり，任意の (どんなに小さい)ε に対しても，ある m をとれて $n>m$ を満たす自然数 n 全て (十分大きい n 全て) に対応する x_n が，

$$|-1-a| = |a+1| < \varepsilon \text{かつ} |1-a| = |a-1| < \varepsilon \tag{1-17}$$

を満たすということであるが，ここで，

i) $a \geqq 1$ のとき
$|x_n - a| = \begin{cases} a-1 & (n \text{ が } m \text{ より大きい偶数のとき}) \\ a+1 & (n \text{ が } m \text{ より大きい奇数のとき}) \end{cases}$ となる．ε は任意の正の数より，$\varepsilon = a(>0)$ とすると，

$$|a-1| = a-1 < \varepsilon = a$$

は成り立つが，

$$|a+1| = a+1 > \varepsilon = a$$

となり，つまり，$\varepsilon = a(>0)$ としたとき，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，(1-17) が成り立つことに矛盾する．

ii) $-1 < a < 1$ のとき

$|x_n - a| = \begin{cases} a+1 & (n \text{ が } m \text{ より大きい奇数のとき}) \\ 1-a & (n \text{ が } m \text{ より大きい偶数のとき}) \end{cases}$ となる．ここで，

$0 < a < \dfrac{1}{2}$ のとき，$1-a < 1 < a+1$ より，$\varepsilon = 1$ とすると，

$$|x_n - a| = 1 - a < \varepsilon = 1$$

は満たすが，

$$|x_n - a| = a + 1 > \varepsilon = 1$$

は満たさない．

また，$a = 0$ のときは，$|x_n - a| = 1$ となり，たとえば $\varepsilon = 0.9$ のときは成り立たない．

また，$-\dfrac{1}{2} < a < 0$ のとき，$a+1 < 1 < 1-a$ より，$\varepsilon = 1$ とすると，

$$|x_n - a| = a + 1 < \varepsilon = 1$$

は満たすが，

$$|x_n - a| = 1 - a > \varepsilon = 1$$

となり満たさない．

よって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，(1-17) が成り立つことに矛盾する．

iii) $a \leqq -1$ のとき

$|x_n - a| = \begin{cases} -a-1 & (n \text{ が } m \text{ より大きい奇数のとき}) \\ 1-a & (n \text{ が } m \text{ より大きい偶数のとき}) \end{cases}$ となるので，ε は任意の正の数より，$\varepsilon = -a(>0)$ とすると，

$$|x_n - a| = -a - 1 < \varepsilon = -a$$

は満たすが，

$$|x_n - a| = 1 - a > \varepsilon = -a$$

となり，つまり，$\varepsilon = -a(>0)$ としたとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，(1-17) が成り立つことに矛盾する．

以上3つの場合分けより，x_n は a に収束しないことが証明された．

収束する数列とか収束しない数列は，$\varepsilon - m$ 論法で証明するのであるが，まさに収束するしないは高校までの直感が大事で (高校までの解き方が大事で)，$\varepsilon - m$ 論法で，その直感で求めた収束するしないを定義に従って証明するだけである．つまり，高校で学んだ解法で収束するとわかったら，必ず $\forall\varepsilon > 0$ に対して m がとれるはずであると思考して解答をつくるのである．もちろん，高校の解法で収束しないとわかっても，同様に考える．$\varepsilon - m$ 論法が最初にありきで，収束するしないを決定するわけでないことに注意する必要がある．

ということである．

収束しないことを証明するのに，先ほど背理法を用いたが，非常に遠回りでややこしかった．もうちょっと，簡単なやり方がないのか考える必要がある

1.12 収束しないことを $\varepsilon - m$ 論法で定義

収束しないということはどういう状態をいうのであろうか．次に収束しない数列を $\varepsilon - m$ 論法を用いて数学的に表現してみよう．

収束しないことの厳密な理論はきちんとした論理構造がある．つまり，

$$\text{収束する (肯定)} \iff \text{収束しない (否定)}$$

という関係がある．この関係を説明しようと思えば結構複雑である．この論理構造で詳しく収束しないことを $\varepsilon - m$ 論法で解説をすると，よほど根気がないかぎり途中でついていけなくなるだろう．そして $\varepsilon - m$ 論法を避けてしまう可能性もある．こうならないためにも，ここでは厳密な理論よりも，収束しないとはどういうことかイメージ重視で解説しよう．厳密な論理については，参考文献 [2, p.25-33] や [3] や [7] を参考にするとよいであろう．イメージ重視というよりも，いっている式の意味を理解することといった方がいいのかもしれない．

さて話を戻そう.『収束しないこと』を説明する前に，$\varepsilon - m$ 論法ではどのように『収束する』という特徴を式で表してきたか，それから復習し説明することにしよう.

数列 $\{x_n\}$ が a に収束するというのは，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，つまりどんなに小さい $\varepsilon > 0$ を選んでも,「ある数」m より大きい自然数全てに対応する x_n すべてが,

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

を満たす．つまり,

$$x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

が成り立つということである (p.28 の図 1-4 参照).

ようは，収束するということは，$\forall\varepsilon > 0$ に対して (どんなに小さい ε をとっても),「ある数」m より大きい自然数全てに対応する x_n が**全くはみ出すことなく**，$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ にすっぽり入れることができることである．ここまでは，何度も述べてきたことだから，だいぶんイメージできていると思う．そして，このことについてより詳しく解説していくことにしよう．それには，具体例で考えるのが一番よい．それには，p.41 の 1.11.4 の問題を使うことにしよう.

収束するとは，任意の $\varepsilon > 0$ について成り立たないといけないので (どんなに小さい ε でも成り立たないといけないので)，$\varepsilon = \cdots, 100, \cdots, 2, 1,$ $0.5, 0.1, 0.01, 0.001, \cdots$ などの各数字についても成り立たないといけない. ここでは，たとえば，$\varepsilon = 0.5$ としよう.

$$|b_3 - 5| = |3 - 5| < \varepsilon = 0.5$$

$\varepsilon = 0.5$ に対して，$m = 2$ を選ぶとする．$n > 2(= m)$ を満たす自然数すべてに対応する数列の項に対して成り立っているかというと，$n = 3, 4$ は満たしていない，つまり,

$$b_3 \notin (5 - 0.5, 5 + 0.5)$$

である．だから，b_n は 5 に収束しないという意味ではない．$m = 2$ がダメなら，$m = 2$ より大きい $m = 4$ や $m = 5$ を考えて，たとえば $\forall n > 4$ に対

応する b_n は全て

$$b_n \in (5-0.5, 5+0.5)$$

を満たした．これで，$\varepsilon = 0.5$ のとき，

$$b_5, b_6, b_7, \cdots, \in (5-0.5, 5+0.5)$$

となる，スタートライン「ある数」$m = 4$ を見つけることができた．つまり，ある数より大きい自然数全てに対応する b_n が，$|b_3 - 5| < 0.5$ を満たしていればよいので， 数列の項が 1 つや 2 つ任意の $\varepsilon > 0$ に当てはまらない場合は，自分で考えて，より大きなある m をとれば，完全に $\forall \varepsilon > 0$ に対して，$(5-\varepsilon, 5+\varepsilon)$ にすっぽり入ることができればよいのである．

同じようにして，たとえば，$\varepsilon = 100$ のときはスタートライン「ある数」$m = 0, 1, 2, \cdots, 4, 5, \cdots$ なんでもよいし，$\varepsilon = 0.1$ のときはスタートライン「ある数」$m = 4$ にすればよい．以下同様にして，そして以上まとめると，どんな ε をもってきても，スタートライン「ある数」m を $m = 4$ にすれば，

$$b_5, b_6, b_7, \cdots \in (5-\varepsilon, 5+\varepsilon)$$

は成り立つ．だから，b_n は 5 に収束するといえるのである．

これは $m = 4$ とまとめなくても，たとえば

$$\begin{aligned}&\text{スタートライン「ある数」}m\\ &= \begin{cases} 0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots,\ \text{どれでもよい} & (\varepsilon > 4) \\ 4, 5, \cdots,\ \text{どれでもよい} & (\varepsilon \leqq 4) \end{cases}\end{aligned}$$

としてもよい．各 ε に対して，それぞれスタートラインの「ある数」m が決まる．ただこうばらばらだとわかりにくいので，よりシンプルに $m = 4$ としたのである．

ここで大事なことは，収束するときは，

> **各 ε に対して，それぞれスタートラインの「ある数」m が決まり，そして，そんなスタートラインの「ある数」m が必ずある．**

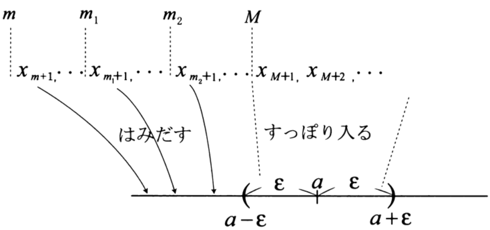
ということである．

このスタートライン「ある数」m の見つけ方であるが，いままでみてきたように，各 $\varepsilon > 0$ に対して，しらみつぶしに調べていく．つまり適当に m を選んでみて (検討をづけてみて)，$n > m$ を満たす自然数すべてに対応する x_n すべてが，いくらか $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ からはみ出しとしたら，さらに m より大きな m_1 をとり，$n > m_1$ を満たす自然数すべてに対応する x_n すべてが $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ にすっぽり入ればよいのである．その m_1 でも，$n > m_1$ を満たす自然数すべてに対応する x_n すべてが $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ にすっぽり入らない項がいくつかある場合は，$m_2 > m_1$ となる m_2 をとり，$n > m_2$ を満たす自然数すべてに対応する x_n すべてが，$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ にすっぽり入ればよいのである．

各 $\varepsilon > 0$ に対してこれらの作業を続けていき，そして任意の (すべての)$\varepsilon > 0$ に対して，m より大きい自然数すべてに対応する数列の項すべてが $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ にすっぽり入ることのできる，スタートライン「ある数」m を見つけることができたら，数列 $\{x_n\}$ が a に収束するといえるのである．これが $\varepsilon - m$ 論法の収束する数列の意味である．

いままで,「任意の $\varepsilon > 0$ に対して」という表現を「どんなに小さい $\varepsilon > 0$」をとってもという表現に言い換えて考えるとよいと述べてきたが，これはいままでの説明より,「$\varepsilon = 0.1$ をとっても，$\varepsilon = 0.01$ をとっても，$\varepsilon = 0.001$ をとっても，$\cdots$，と各 ε を調べてみても」と置き換えて考えたらよい．

スタートライン「ある数」M の見つけ方



収束する数列とは，ε をどんなに小さくしても，いずれある数 M より大きい全ての自然数に対応する数列の項すべてが必ず，$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ にすっぽり入る．そして，そんなことができるスタートライン「ある数」M を，各 ε に対して見つけることができる．

図 1-11　スタートライン「ある数」M の見つけ方

> 収束するとは (x_n が a に収束するとする)，どんな $\varepsilon > 0$ をとっても，$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ からはみ出す**有限個の数列の項はあるが (それは無視して)，**とにかく,「ある数」m より大きい自然数すべてに対応する数列の項すべてが，$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ の中にすっぽり入れるようにできるようなスタートラインの「ある数」m を見つけることができ，そして，また**そんなスタートラインの「ある数」m が必ずある．**

ということである．

『収束しない数列』はこれに当てはまらなければよいのである．つまり，**各** ε に対して，m より大きい自然数すべてに対応する数列の項を $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ にすっぽり入れることのできる，スタートライン「ある数」m を見つけることができるか調べているときに，そんなスタートライン「ある数」m を見つけられないときにその数列は収束しないというのである．つまり，たとえば $\varepsilon = 100$ のときスタートライン「ある数」m を見つけることができた，$\varepsilon = 5$ のときもスタートライン「ある数」m を見つけることができた，$\varepsilon = 0.1$ のときもスタートライン「ある数」m を見つけることができた，$\cdots$，しかし，$\varepsilon = 0.01$ のとき，どんなに m を見当をつけても，**どんな m を考えてみても，**

どうしても m より大きい自然数で，$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ からはみ出してしまう数列の項が存在してしまうということである．p.53 の図 1-11 のスタートライン「ある数」m の見つけ方をもう一度参考に考えてみるとよい．

$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ からはみ出す項があれば，$m < m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$ と m を大きくしてみても，どうしても m より大きい自然数で，$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ からはみ出してしまう数列の項が存在してしまうということなのである．これが,『収束しない数列』の特質なのである．それでは，これらの文章を簡潔に数式で表す前に，具体例でみることにしよう．具体例は，p.19 の数列 (1-3) を使うことにする．

1.12.1　収束しない数列の具体例を考える

$$\{x_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{6}, 1, \frac{1}{8}, 1, \frac{1}{10}, \cdots, \right\}$$

【考え方】

以下考えるときに，p.24 の図 1-3 を見ながら考えてみよう．

ここでは，まず極限値を 0 と仮定してみる．$\varepsilon - m$ 論法に当てはめて，どんな $\varepsilon > 0$ をとっても,「ある数」m より大きい自然数すべてに対応する数列の項すべてが，$(0-\varepsilon, 0+\varepsilon)$ の中にすっぽり入れるようにできるような，つまり

$$|x_n - 0| < \varepsilon$$

を満たすスタートラインの「ある数」m を見つけることができるかということである．たとえば，$\varepsilon = 3$ としたときは，$m = 0$ としたらよいし (別に $m = 1$ でも，$m = 2$ でも，$m = 3$ でもかまわない．この場合は，$m \geqq 0$ を満たす実数であれば何でもよい．というより，m は任意の実数の 1 つでもかまわない)，$\varepsilon = 2$ のときも，m は任意の実数の 1 つであればよいし，

$\varepsilon = 1.5$ のときも，m は任意の実数の 1 つであればよい．以下このような操作を繰り返していくと，たとえば $\varepsilon = 0.9$ としたときに,「ある数」m より大きい自然数すべてに対応する数列の項すべてが

$$|x_n - 0| < 0.9$$

を満たす，または $(0-0.9, 0+0.9)$ にすっぽり入るような，スタートライン「ある数」m を見つけようとしても，$m=1$ のときも $2n+1>n>1$ の x_{2n+1} の項がはみ出す，$m=2$ のときも $2n+1>n>2$ の x_{2n+1} の項がはみ出す，$m=1000$ のときも $2n+1>n>1000$ の x_{2n+1} の項がはみ出す，以下どんな m を考えてみても，m より大きい奇数に対応する数列の項が必ず $(0-0.9, 0+0.9)$ からはみだしてしまうのである．だから，$\varepsilon=0.9$ のときはすっぽり入れることのできるようなスタートライン「ある数」m を見つけることができないのである．だからこの数列は 0 に収束しないということが，いえたのである (図 1-12 を参照)．ただ，この場合 0 に収束をしないといえただけなので，数列 (1-3) が収束しないということを数式で証明するとき，その他の数字，たとえば 1 に収束しないということも証明しないといけないし，ましてやその他の実数にも収束しないということも証明しないといけないのである．

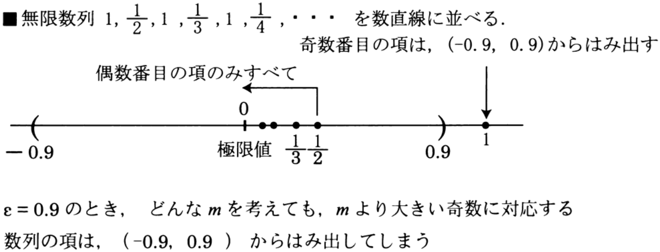


図 1-12　どんな m を考えても，必ずある数列の項は $(0-0.9,\ 0+0.9)$ からはみだしてしまう

それでは，これら具体例の内容を，一般的な式で表し，『収束しない数列』の特質を利用して，数列が収束しないというのを $\varepsilon - m$ 論法で表すとどうなるのか以下説明しよう．そのためには，先ほど考えた具体例を，一般的な言い方をしないといけない．

数列 $\{x_n\}$ が a に収束しないとは，各 ε に対して，m より大きい自然数すべてに対応する数列の項を $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ にすっぽり入ることのできる，ス

タートライン「ある数」m を見つけることができるか調べているときに，たとえばある ε_1 のときに，どんなスタートライン「ある数」m を考えてみても，m より大きい自然数に対応する x_n で，

$$x_n \notin (a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1)$$

となるものが存在してしまうときである．これは，m がダメなら $m_1 > m$ となる m_1 をとって，$n > m_1$ を満たす自然数に対応する x_n でも

$$x_n \notin (a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1)$$

となるものが存在してしまう．それでもはみ出さないようにと，$m < m_1 < m_2 < \cdots$ といくら大きい M をとっても $n > M$ を満たす自然数に対応する x_n に必ず

$$x_n \notin (a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1)$$

となる数列の項が存在してしまうのである (p.53 の図 1-11 を参照).

まとめれば，

> $\{x_n\}$ が a に収束しないとは，$\varepsilon = \square$ のとき，スタートライン「ある数」$m_\square$ が見つかり，$\varepsilon = \triangle$ のとき，スタートライン「ある数」$m_\triangle$ が見つかり，$\varepsilon = \bigcirc$ のとき，スタートライン「ある数」$m_\bigcirc$ が見つかりとこのような作業を続けていると，$\varepsilon = \bullet$ のとき，どんなスタートライン $m_\bullet$ を見つけようとも，必ず，$n > m_\bullet$ を満たす自然数に対応する数列の項 x_n で，$x_n \notin (a - \bullet, a + \bullet)$ となる数列の項が必ず存在する

ということである．

これを，余分な部分を省いて数学的な表現で述べると，

> **ある** $\varepsilon_1 > 0$ を考えたとき，**任意の** m に対して $n > m$ を満たす自然数に対応する x_n で，
>
> $$x_n \notin (a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1)$$
>
> となるものが必ず存在する

ということである．

また，

$$x_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

は

$$|x_n - a| \geqq \varepsilon$$

と同値であるから (とにかく予想の極限値 a と x_n がある距離以上縮まらない $n > m$ を満たす n がとれるということである．)，x_n が a に収束しないということを $\varepsilon - m$ 論法で表現すると

ある ε をとると，**任意の** m に対して，$n > m$ を満たすある自然数 n 対応する数列の項 x_n で，$|x_n - a| \geqq \varepsilon$ となるものが存在する

となるが，またさらに $\varepsilon - m$ 論法で用いられる数学の記号のみで表すと次のようになる.『任意の』という記号は ∀ で,『ある』という記号は ∃ という記号を使うことに注意して，

$$\exists \varepsilon > 0, \qquad \forall m, \qquad \exists n > m \quad : |x_n - a| \geqq \varepsilon \tag{1-18}$$

となる．

【解説】

上記の数列が収束しない $\varepsilon - m$ 論法表記 (1-18) と，p.35 の収束する $\varepsilon - m$ 論法表記 (1-8) をよく見比べてみよう．よく見ると，不等号の向きと「ある＝ ∃」と「任意の＝ ∀」が全て入れ替わっていることがわかるであろう．つまり，収束する (肯定) の数学的な否定 (収束しない) は，∃ と ∀ を入れ替えるだけでよいのである．これは連続関数の $\varepsilon - \delta$ 論法も全く同じ手法が使える．この肯定と否定の関係は，厳密に論理記号の組み合わせだけで解説できるが，もし論理ばかり追いかけていたら，初心者には難しすぎて退屈になるだけであろう．この式をいきなり見せられて，これが収束しない数列の場合を $\varepsilon - m$ 論法で表したものであるといわれても，よほど数学ができる人でないと理解できないだろうと私は考える．厳密な論理も大事であるが，いま

まで私が説明してきた式の意味を解説することによってはじめて理解できることである．

それでは，背理法を使わずに，正攻法 (収束することの否定) で，つまり，(1-18) を使って収束しないことを具体例で示そう．**いままで私たちが習っていたのは，「次の極限値を求めよ」というような問題ばかりであったが，$\varepsilon - m$ 論法を学んだいま，「この数字には収束しないということを示せ」というような問題も考えることができるのである．このことを知っておいてほしい．**

1.12.2　数列がある値に収束しないということ証明例

$$\{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\right\}$$ は 1 以外の値には収束しない．

【解説】

収束しないことを背理法で，p.44 の 1.11.5 で解説した．今回は，背理法を使わずに正攻法 (収束することの否定) で収束しないことを証明しよう．まずは具体的な数字で証明して，あとは一般化することにしよう．

【具体例の証明】

たとえばこの数列が 2 に収束しないことを証明しよう．

まず，収束する条件を満たすスタートライン「ある数」m が，存在するかどうか各 ε に対して考えていこう．

$\varepsilon = 3$ のときは，$m = 0$ とすれば，$n > m = 0$ を満たすすべての自然数に対応する数列の項は，$(2-3, 2+3)$ の中にすっぽり入る．つまり，

$$x_1, x_2, x_3, \cdots \in (2-3, 2+3)$$

で，$\varepsilon = 3$ のときは，スタートライン「ある数」m が存在した．

また，$\varepsilon = \dfrac{31}{40}$ のときは，$m = 2$ とすれば，$n > m = 2$ を満たすすべての自然数に対応する数列の項は，$\left(2 - \dfrac{31}{40}3, 2 + \dfrac{31}{40}\right)$ の中にすっぽり入る．つまり，

$$x_3, x_4, x_5, \cdots \in \left(2 - \frac{31}{40}, 2 + \frac{31}{40}\right)$$

で，$\varepsilon = \dfrac{31}{40}$ のときも，スタートライン「ある数」m が存在した．(図 1-13 参照)

ここで，仮定の極限値 2 と一般項 x_n の距離を考えよう．

$$\left|\frac{n}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{-n-2}{n+1}\right| = \left|\frac{n+2}{n+1}\right|$$
$$= \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} > 1$$

となる．この式の意味を考えると，$\dfrac{n}{n+1}$ と 2 との距離は，任意の n に対して (すべての自然数 n に対して)，必ず 1 より大きくなる．つまり，1 以下には縮まらないことをいっている．

よって，この式をヒントにして，たとえば $\varepsilon = 0.9$ を考えると，どんな「ある数」m を考えようとも (p.44 でも述べたように，$m \geqq 0$ とする)，$n > m$ を満たす自然数 n に対応する数列の項 x_n は

$$x_n \notin (2 - 0.9, 2 + 0.9)$$

である．つまり，

$$|x_n - 2| > 0.9$$

となる x_n が存在する．よって，$\dfrac{n}{n+1}$ は 2 に収束しない．

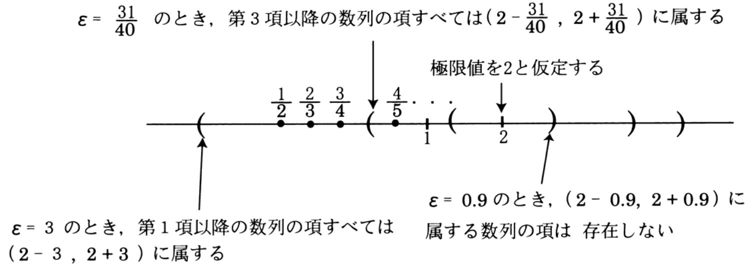


図 1-13　仮定した極限値 2 の周りの様子

それでは，1 以外に収束しないことを証明しよう

【証明】

まず，1 に収束するこは，p.36 の問題 1.11.1 で証明されている．だから，$a \neq 1$ として，数列が a に収束しないことを証明すればよい．つまり，$a > 1$ の場合と $a < 1$ の場合分けをして証明しよう．

i) $a > 1$ のとき

$$\left|\frac{n}{n+1} - a\right| = \left|\frac{n(1-a) - a}{n+1}\right| = \left|\frac{n(a-1) + a}{n+1}\right|$$
$$= \left|(a-1) + \frac{1}{n+1}\right| > a - 1$$

ここで，$\exists\varepsilon = a - 1(> 0)$ をとると，$\forall m$ に対して，$\exists n > m$ である n をとると，

$$\left|\frac{n}{n+1} - a\right| > a - 1$$

であるから，$\dfrac{n}{n+1}$ は 1 より大きい a に収束しない．(この流れを説明しておこう．まず $\left|\dfrac{n}{n+1} - a\right| > a - 1$ から $\dfrac{n}{n+1}$ と a の距離は，任意の (すべての) 自然数 n に対して，$a - 1$ 以下に縮まらないことをいっている．これをヒントにして，たとえば，$\varepsilon = a - 1$ のとき，すっぽり入るような条件を満たす「ある数」m をどんなに考えようとも，$n > m$ を満たす自然数 n に対応する x_n はもちろん，$x_n \notin (a - (a-1), a + (a-1))$ である．つまり，$|x_n - a| > a - 1$ となる x_n が存在するということである．こういうふうに，式を展開している意味をしっかり考えられるようにしよう．)

ii) $a < 1$ のとき

$$\left|\frac{n}{n+1} - a\right| = \left|\frac{n(1-a) - a}{n+1}\right|$$
$$= \left|(1-a) - \frac{1}{n+1}\right|$$
$$> \left|(1-a) - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2} - a\right|$$

となる．これは，$a < \dfrac{1}{2}$ のときは，$\dfrac{n}{n+1}$ と a の距離は，任意の (すべての) 自然数 n に対して，$\dfrac{1}{2} - a$ 以下に縮まらないことをいっているので，$a > 1$ のときと同様にして証明できる．ここでは，$\dfrac{1}{2} \leqq a < 1$ の場合のときのみを証明しよう．

(1) $\dfrac{1}{2} < a < 1$ のとき
$\varepsilon = \dfrac{1-a}{2}$ とする (図 1-14 参照)．とりあえず，

$$\left|\frac{n}{n+1} - a\right| > \frac{1-a}{2}$$

これは，$\dfrac{n}{n+1} \notin \left(a - \dfrac{1-a}{2}, a + \dfrac{1-a}{2}\right)$ ということを満たす数列の項が存在するか，不等式を解いてみると，

$$n < -1 + \frac{2}{3-3a}, -1 + \frac{2}{1-a} < n$$

となる．ここで，$\dfrac{1}{2} < a < 1$ なので，特に，

$$3 < -1 + \frac{2}{1-a} < n$$

である．よってこれは，ε としてたとえば，$\varepsilon = \dfrac{1-a}{2}$ を考えたときに，$n > 3$ に対応する数列の項は，

$$\frac{n}{n+1} \notin \left(a - \frac{1-a}{2}, a + \frac{1-a}{2}\right)$$

ということである．したがって，任意の m に対して (どんな m を考えようとも)，$n > m$ かつ $n > 3$ を満たす自然数 n を考えれば，

$$\left|\frac{n}{n+1} - a\right| > \frac{1-a}{2}$$

となり，$\dfrac{n}{n+1}$ は $\dfrac{1}{2} < a < 1$ である a に収束しない．

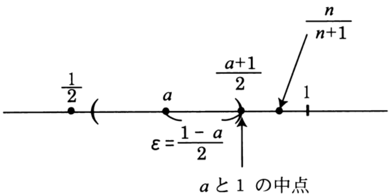


図 1-14　仮定した極限値 $\frac{1}{2} < a < 1$ のときの周りの様子

(2) $a = \frac{1}{2}$ のとき $\varepsilon = \frac{1}{4}$ とすると,

$$\left|\frac{n}{n+1} - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{4}$$

を解いてみると,

$$n < \frac{1}{3},\ 3 < n$$

となり，任意の m に対して (どんな m を考えようとも)，$n > m$ かつ $n > 3$ を満たす自然数 n を考えれば,

$$\left|\frac{n}{n+1} - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{4}$$

となり，$\frac{n}{n+1}$ は $\frac{1}{2}$ に収束しない．(イメージは図 1-14 を参照せよ)

以上 2 つの場合分けより，1 以外には収束しないことが証明された．

こんな一見簡単そうにみえる問題でも，いざ証明をしようとしたらかなりの知恵と労力が必要になる．単純な問題でもいいから，自分でも「この数列はこの値に収束しない」というような問題を考えてみて，$\varepsilon - m$ 論法の実力をつけてみよう．

1.13 『限りなく大きくする』『限りなく近づく』という言葉について

1.13.1 限りなく大きくする

数列の収束などを考えるとき，『n を限りなく大きくする』という表現を使ってきたが，これには深い意味がある．どういうことかというと，$n \to \infty$ のとき，数列 $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ は 1 に収束したが，$n \to \infty$ の具体的に大きくする過程を考えてこなかった．

これは実は，n を限りなく大きくするということは ($n \to \infty$ とすることは),

$$1, 2, 3, 4, \cdots$$

と大きくしてもよいし，

$$1^5, 2^5, 3^5, 4^5, \cdots$$

と大きくしてもよいし，あらゆる n の大きい仕方をしても，$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ は 1 に近づくということをいっているのである．つまり，$n \to \infty$ はあらゆる大きい仕方を含んでいることに注意する必要がある．

これでイメージがわきにくければ，p.38 の例 1.11.2 の数列 $\dfrac{(-1)^n}{n}$ の極限を考えるとよい．この数列は 0 に収束したが，

$$n = 1, 3, 5, 7, \cdots,\ \text{としても}, -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \cdots, \to 0$$

であるし，

$$n = 2, 4, 6, 8, \cdots,\ \text{としても}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \cdots, \to 0$$

である．つまり，奇数だけ考えて増やしていっても 0 に収束するし，偶数だけ考えて増やしていっても 0 に収束する．この他いろいろ考えられ，あらゆる大きい仕方を考えても 0 に近づいているのである．

逆に考えると，p.19 の数列 (1-3)

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{6}, 1, \frac{1}{8}, 1, \frac{1}{10}, \cdots,$$

で,

$$n = 1, 3, 5, 7, \cdots, \text{ としたら}, 1, 1, 1, 1, \cdots, \to 1$$

であるが,

$$n = 2, 4, 6, 8, \cdots, \text{ としたら}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \cdots, \to 0$$

となり，違う大きい仕方を考えると極限値が違うので，この数列は収束しないといういい方もできる．

このあらゆる大きい仕方を使って，数列 x_n が a に収束するということを示すのは不可能であるということは安易に想像できる．しかし，$\varepsilon - m$ 論法ではそれが保証されているのである．それはどういうことかというと，収束する数列とは，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある数 m がとれ，$n > m$ を満たす自然数全てに対応する数列の項すべての x_n は，$|x_n - a| < \varepsilon$ を満たすことであったが，$n > m$ を満たす自然数 n で，

$n, n+1, n+2, \cdots$ と大きくしても,

$$x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

であるし，$n^3, (n+1)^3, (n+2)^3, \cdots$ と大きくしても,

$$x_{n^3}, x_{(n+1)^3}, x_{(n+2)^3}, \cdots, \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

であるし，$n^5, (n+1)^5, (n+2)^5, \cdots$ と大きくしても,

$$x_{n^5}, x_{(n+1)^5}, x_{(n+2)^5}, \cdots, \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

であることをいっているのである．つまり，すべての a への近づき方を含んでいるということを考えておかないといけないのである．つまり,

点 a に収束する＝点 a にあらゆる近づき方をしても a に近づく

ということである．$\varepsilon - m$ **論法は，あらゆる大きい仕方をつかっても，**a **に収束しているということまでいえることを証明しているのである．**逆にいうと，特別な近づき方をして収束しないというのは，どんなに ε を小さくしても必ず絶対値からはみ出る数列の項があるということである．

つまり，$\forall\varepsilon > 0$ に対して $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内にあれば，x_n はどんな振る舞いをしても a に近づいてもかまわないという意味がある．収束の証明 (定義) で絶対値を使う理由は個人的にはここにあると思う．

これは，2 変数関数以上の多変数関数の連続性などを証明するときに非常に大事なイメージである．これについてはここでは述べないが，参考文献 [1, p.110-119] で詳しく述べているのでそちらを参考にしていただきたい．

1.13.2 集積値

数列 $\{x_n\}$ が a に収束するとき，いろいろな近づき方をしても a に収束するという特徴を先ほど述べた．これについて考えるとする．

p.44 の数列 $x_n = (-1)^n$ について考えよう数列 $\{x_n\}$ で，n が偶数の列だけ取り出すと

$$\left\{\underset{x_2}{\overset{1}{\|}}, \underset{x_4}{\overset{1}{\|}}, \underset{x_6}{\overset{1}{\|}}, \underset{x_8}{\overset{1}{\|}}, \cdots\right\}$$

となり，この数列は 1 に収束する．同様に奇数列だけ取り出せば -1 に収束する．このように，部分列の極限値を**集積値**という．つまり，n を $2, 4, 6, \cdots$ と大きくすると 1 に収束し，$1, 3, 5, \cdots$ と大きくすると -1 に収束するということである．この場合，大きくする仕方を変えることによって，収束値が違うのでこの数列は収束しない，または集積値が 2 つなので収束しないといういい方ができる．

言い換えれば，収束する数列について，

$$\text{数列が収束する} \Longleftrightarrow \text{集積値が 1 つだけ存在}$$

ということがいえそうだが，これは実は完璧ないい方ではない．なぜなら，

$$1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, 6, \cdots$$

は確かに，偶数番目だけ取り出した数列を考えると 0 に収束するが，奇数番目だけ取り出した数列は発散する．よってこの数列は集積値はただ 1 つであるが収束する数列ではない．

したがって，

$$\textbf{数列が収束する} \Longleftrightarrow \textbf{有界かつ集積値が 1 つだけ存在}$$

はいえるのである．有界性については，p.73 を参照．

p.38 の数列 $\dfrac{(-1)^n}{n}$ では，偶数番目の項 $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{6}$，$\cdots$ で，奇数番目の項は，-1，$-\dfrac{1}{3}$，$-\dfrac{1}{5}$，$\cdots$ である．どちらも集積値は 0 である．つまり，n を $2, 4, 6, \cdots$ と大きくしても，$1, 3, 5, \cdots$ と大きくしても，0 に収束する．注意しておかないといけないのは，この 2 つの部分列だけをとって考えて，ともに 0 に収束するから，元の数列は 0 に収束するといういい方は間違いである．なぜなら，偶数列や奇数列以外に，10 おきに項を並べた数列などあらゆる大きい仕方の収束値を述べていないからである．あらゆる大きい仕方を全部調べるのは，もちろん無理なので，きちんと証明するには，$\varepsilon - m$ 論法を使わないといけない．

以上をまとめると

> **収束する数列は任意の (あらゆる) 部分列を取り出しても同じ値に収束してそれが元の数列の収束値になる．つまり，あらゆる大きい仕方をしても，同じ数に収束する．逆に数列から部分列をとりだしたとき，同じ値に収束しなければその元の数列は収束しないのである．**

これは収束する数列の大事な性質である．数列が与えられて極限を考えるとき，あらゆる部分列を取り出して同じ値に収束するから元の数列は収束するということを証明するのは無理であることは先ほど述べた．しかし，収束しないことを証明するときは，いくつかの部分列をとりだしてそれぞれの極限値を求め，それが本当に正しいことを $\varepsilon - m$ 論法で証明して，極限値が違うから (集積値が複数あるから) 収束しないということを証明してもかまわない．

【注意】

大学の数学の範囲で，特に『集合と位相』という分野で**集積点**というものが定義され紹介されるが，この数列の極限値に使う**集積値**とは微妙に定義が違うので注意しておく必要がある．大学の先生によっては，**集積値**のことを「数列の集積点」という先生もいる．集積点については p.134 の集積点の定義 2.2.10 に解説している．

1.13.3 限りなく近づく

x_n が a に収束するとき，x_n が a に『限りなく近づく』といういい方をしてきたが，これは $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots$ と a の距離がいくらでも小さくできるということであった．この『限りなく近づく』という考えを，理解するには，次のような数列を考えるとよい．

$$\left\{\frac{1}{n}+1\right\} = \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots\right\} \tag{1-19}$$

この数列は，人によっては，0 に近づいていると答えるかもしれない．それもあながち数直線上に点を取って並べると間違いではない．それなら，0 に近づいているが，0 のぎりぎりまで近づくことができるかと問われたときは，1 より先には行かないと簡単に証明することもできる．これは，0 にある程度もまでは近づくことができるか，直近 (この直近というのも人によって感覚が違う主観的なことである) までは近づくことができない．つまり,『限りなく近づくことができない』ということである．

そして，何度も述べてきたが，数列 $\{x_n\}$ が a に限りなく近づくことができるというのは，どんなに小さい $\varepsilon > 0$ をとってきても，スタートライン「ある数」m が見つかり，$n > m$ を満たすすべての自然数に対応する数列の項が,

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

の中にすっぽり入るようなものが存在するということである．それが,「限りなく近づく」ということの，式でのいい換えである．

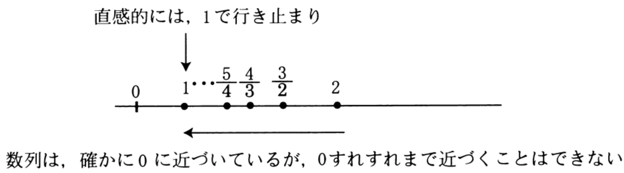


図 1-15 数列は 0 にはある程度まで近づく

1.14 収束する数列の定理・特徴 ($\varepsilon - m$ 論法を使って証明できること)

いまからたくさん収束する数列の公式を紹介するが，証明の全てには $\varepsilon - m$ 論法が使われる．この章の冒頭でも述べたが，$\varepsilon - m$ 論法を学ぶことによって，収束する数列の特徴がいろいろ解明できていく．これが，高校の数列の極限の問題と大学で学ぶ数学の極限の問題の大きな違いということも述べた．$\varepsilon - m$ 論法を使うことによって，いままで直感で学習してきた公式・特徴が，しっかりと証明・解説できる過程を実感してもらいたい．

1.14.1 定理：極限の一意性

収束する数列の極限値はただ 1 つである

【解説】

こんな定理当たり前で，極限値が複数あるなんて疑ったことなど全くなかったはずである．しかしその明らかなことを証明せよといわれれば何から手をつけていいのかわからないし，いざ証明しようと思っても非常に難しいのである．やはりこの証明も $\varepsilon - m$ 論法を用いなければ証明できない．

【証明】

背理法で証明しよう．つまり，つまり収束する数列 x_n に，2 つの極限値 a と b(ただし，$a \neq b$) が存在したとする．これを式で表すと，

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ に対して}, \exists m \text{ が存在して}, \forall n > m, |x_n - a| < \varepsilon, \text{ かつ } |x_n - b| < \varepsilon \tag{1-20}$$

が成り立つということである．

ここで，$a \neq b$ ということであるから，$b < a$ とする．ε は任意の正の数であるから，もし $\varepsilon = \dfrac{a-b}{4} > 0$ とすると，

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{は}, \frac{3a+b}{4} < x_n < \frac{5a-b}{4} \tag{1-21}$$

$$|x_n - b| < \varepsilon \text{は}, \frac{-a+5b}{4} < x_n < \frac{a+3b}{4} \tag{1-22}$$

となることに注意して，「ある数」m がとれて，$n > m$ を満たすすべての自然数に対応する数列の項は

$$x_n,\, x_{n+1},\, x_{n+2}, \cdots, \in \left(\frac{3a+b}{4}, \frac{5a-b}{4}\right)$$

かつ

$$x_n,\, x_{n+1},\, x_{n+2}, \cdots, \in \left(\frac{-a+5b}{4}, \frac{a+3b}{4}\right)$$

を同時に満たさないといけないが，これは不可能である．つまり，$n > m$ を満たすすべての自然数に対応する数列の項は，ここで，$\forall n > m$ に対応する x_n が，$x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, \in \left(\frac{3a+b}{4}, \frac{5a-b}{4}\right)$ を満たすとすると，
$x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, \notin \left(\frac{-a+5b}{4}, \frac{a+3b}{4}\right)$ ということである (図 1-16 参照).

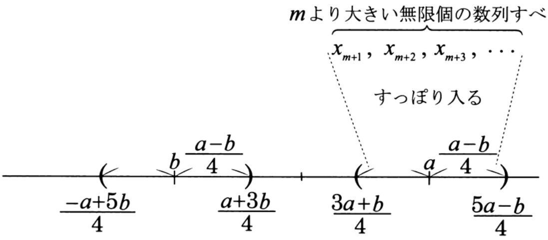


図 1-16

これは，ε として，$\varepsilon = \dfrac{a-b}{4} > 0$ をとると，十分大きい n 全てに対応する x_n は，b の近くにないということで，これは b に収束しないことを意味している．つまり，仮定 (1-20) と矛盾する．同様に，$b > a$ としても，仮定 (1-20) 矛盾が起きるので，$a = b$ である．よって，収束する数列の極限値は 1 つであることが証明された．

【注意】

この証明で，$\varepsilon = \dfrac{a-b}{4} > 0$ と ε をとったが，どうしてこのようにとったかというと，図 1-16 より，b の開区間の右端 $b+\varepsilon$ と a の開区間の左端 $a-\varepsilon$

が重ならないようにとっているのである．ポイントは，ε が任意であるから，正であるならどんな値でもとってもよく，a と b の間の4等分すればしたら，重ならないのは図1-16より明らかである．だから，別に10等分した $\varepsilon = \dfrac{a-b}{10} > 0$ でもよいし，100等分した $\varepsilon = \dfrac{a-b}{100} > 0$ でもよいのである．ようは，ε が任意というところがポイントである．

コメント

証明のとき，背理法を使うか，対偶を使うか，それとも正攻法でせめるか，最初は迷うであろうし悩むものである．高校時代は,『$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明』は背理法を使えばよいとか,『mn が偶数ならば，m , n のうち少なくとも一方は偶数であることの証明』の場合は対偶を使えばよいなど，証明はある程度パターンが決まっていたし，数学が得意な人であれば，なんとなくどの方法で証明をすればよいか勘付くものである．しかし大学の数学の場合，正攻法の証明以外は，どうしてそれを使おうとしたのかわからないのも無理はない．とにかく大学の証明は，内容をきちっと理解して，自分で証明を何時間かけてでも (何週間かけてでも) 自分でつくることである．自分で証明が作れるようになるということは，きちっと理解しているということの裏返しでもある．だから，どうしていきなり背理法で証明したのだろうと疑問に思っても，そうすればうまくいくからという気持ちに切り替えて，それがしっかり理解できたら自分で正攻法の証明をつくるというやり方で学習していけばよいであろう．これは私の経験上であるが，正攻法の証明が難しいと思ったら，背理法を使うとうまくいくことが多かった．

1.14.2　収束する数列と極限値の大小関係

$$\text{任意の } n \text{ に対して } x_n > a,\ \text{かつ} \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \text{であるとき},\alpha \geqq a$$

【解説】

まず具体例を示そう．$x_n = \dfrac{1}{n}$ とすると，任意の n に対して $x_n > 0$ であ

り，$n \to \infty$ のとき $x_n \to 0$ である．つまり，$\alpha = 0$ がありえるということである．

【証明】

背理法で証明しよう．$\alpha < a$ とする．仮定が α に収束するということであるから，$\forall\, \varepsilon > 0$，$\exists m$，$\forall n > m$，

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon$$

つまり,「ある数」m より大きい自然数すべてに対応する数列の項 x_n は

$$\alpha - \varepsilon < x_n < \alpha + \varepsilon$$

を満たしている．または

$$x_n,\, x_{n+1},\, x_{n+2}, \cdots (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$$

ということである．

ここで，$\varepsilon > 0$ は任意であるから，

$$\varepsilon = \frac{a - \alpha}{2}$$

とすると，

$$\frac{3\alpha - a}{2} < x_n < \frac{a + \alpha}{2}$$

で，$\alpha < a$ より

$$x_n < \frac{a + \alpha}{2} < \frac{a + a}{2} < a$$

となり，任意の n に対して $x_n > a$ に矛盾する．よって，$\alpha \geqq a$ でないといけない (図 1-17 参照).

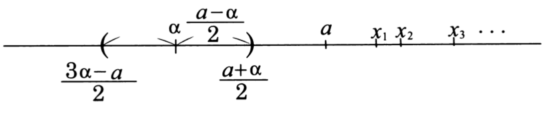


図 1-17　仮定の中でのイメージ図

【注意】

p.68 の極限の一意性の証明のところでも述べたが，ε が任意であるから，正であるならどんな値でもとってもよく，$\varepsilon = \dfrac{a-\alpha}{10} > 0$ でもよいし，$\varepsilon = \dfrac{a-\alpha}{100} > 0$ でもよい．ここらあたりは，矛盾を示すような ε を探すには，経験と勘がいるかもしれない．

1.14.3　定理：はさみうちの定理

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$，かつ，$a_n \leqq b_n \leqq c_n$ が成り立つとき，

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$$

このはさみうちの定理は，大学受験を体験した読者にとって，お世話になった人も多いだろうし知らない人はまずいないであろう．このはさみうちの定理であるが，高校の教科書や参考書にも必ず載っているが，よくそれらを読んでみると証明がかかれていないのである．それは言い換えれば高校の範囲では証明が無理ということである．$\varepsilon - m$ 論法を使ってはじめて証明ができるのである．

【証明】

仮定より，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ であるから，

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ に対して}, \exists m_1 \text{が存在して}, \forall n > m_1, |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ に対して}, \exists m_2 \text{が存在して}, \forall n > m_2, |c_n - \alpha| < \varepsilon$$

ここで $m = \max\{m_1, m_2\}$ をすると ($\max\{m_1, m_2\}$ は，m_1 と m_2 の大きい方を選ぶということ)，

$\forall\varepsilon > 0$ に対して, $\exists m$ が存在して, $\forall n > m$, $|a_n - \alpha| < \varepsilon$，かつ $|c_n - \alpha| < \varepsilon$

となる．つまり，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，$\exists m$ が存在して，

$$\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon \quad \text{かつ} \alpha - \varepsilon < c_n < \alpha + \varepsilon$$

となり，ある数 m より大きい自然数すべてに対応する数列の項 a_n と c_n は

$$a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots, \in (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$$

かつ，

$$c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, \cdots, \in (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$$

を満たしている．

仮定より，任意の n に対して，$a_n \leqq b_n \leqq c_n$ が成り立つから，もちろん，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある数 $m(=\max\{m_1, m_2)\}$ が定まっていて，$n > m$ を満たす自然数すべてに対応する b_n も

$$b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \cdots, \in (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$$

つまり，$n > m$ を満たす各自然数対応する b_n に

$$\alpha - \varepsilon < a_n \leqq b_n \leqq c_n < \alpha + \varepsilon$$

を満たしている．

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ に対して}, \exists m \text{ が存在して}, \forall n > m, \alpha - \varepsilon < b_n < \alpha + \varepsilon$$

よって，

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ に対して}, \exists m \text{ が存在して}, \forall n > m, |b_n - \alpha| < \varepsilon$$

となり，b_n は α に収束することが証明された (注意することは，m は $m(=\max\{m_1, m_2)\}$ を考えればよいことに注意).

これで，大学入試でお世話になったはさみうちの定理が証明されたのである．

次にも収束する数列の特徴を述べるが，その前に言葉の定義を説明しよう．

1.14.4　定義：有界

数列 x_n が有界であるとは，

$$\forall n \text{ に対して}, n \text{ に無関係な } K \text{ が存在して}, |x_n| < K$$

が成り立つことである．

上に有界な数列の例

p.39 の例 1-11 の数列，

$$\{x_n\} = \{1, 1, 1, \cdots\}$$

は有界な数列である．なぜなら，

$$\forall n \text{ に対して}, |x_n| < 2$$

が成り立つからである．もちろん $K = 3$ や $K = 100$ でもよい．

上に有界な数列の例

p.17 の例 1.5 の数列，

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots\right\}$$

は有界な数列である．なぜなら，たとえば任意の自然数 n に対して，

$$\frac{n}{n+1} < 100 \quad \Longleftrightarrow \quad 99n + 100 > 0$$

が成り立つ．よって，

$$\left|\frac{n}{n+1}\right| < 100$$

が成り立つ．

上に有界な数列の例

p.44 の例 1-13 の数列，

$$\{x_n\} = \{-1, 1, -1, 1, \cdots\}$$

は有界な数列である．なぜなら，

$$\forall n \text{ に対して}, |x_n| < 2$$

が成り立つからである．もちろん $K = 3$ や $K = 100$ でもよい．これは有界な数列であっても，収束しない数列である．

上の例を見てもわかるように，有界だからといって必ずしも数列が収束するとは限らないことがわかるであろう．しかし，次のことはいえるのである．

1.14.5 収束する数列は有界である

収束する数列は有界である

【解説】

これは数列が収束するための必要条件であって，十分条件でないことに注意する．つまり，先ほどの例のように，**上に有界だからといって，収束するとは限らないのである．**ちなみにこれは，p.87 の定理 1.14.11 のための準備である．

【証明】

仮定が，数列が収束するということで，数列 $\{x_n\}$ が a に収束したとする．つまり，

$$\forall\varepsilon > 0, \qquad \exists m, \qquad \forall n > m \qquad : |x_n - a| < \varepsilon \tag{1-23}$$

がいえる．つまり，$\forall\varepsilon > 0$ に対して,「ある数」m より大きい自然数すべてに対応する数列の項は

$$x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

を満たしている．$\varepsilon > 0$ は任意であるから，

$$\varepsilon = 1$$

として，$\exists m, \forall n > m$ に対して，

$$x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots \in (a - 1, a + 1) \tag{1-24}$$

が成り立つ．よって，m より大きい自然数に対応する数列の項は $a + 1$ 以下で，$a - 1$ 以上ということがいえる．また，m より小さい自然数に対応する

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_l$$

は有限個であることに注意して (ここで l は $l < m$ を満たす自然数)，$\{x_n\}$ は

$$x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, \cdots,\, x_l,\, a+1,\, a-1$$

の中で最大値と最小値をとるということがいえる．よって，この中で最大の数を A，最小の数を B とすると，

$$\text{任意の自然数 } n \text{ に対して}, B \leqq x_n \leqq A$$

が成り立つ．よって，$|A|$，$|B|$ のいずれより大きい 1 つの正の数を M とすると，

$$-M < -|B| \leqq B \leqq x_n \leqq A \leqq |A| < M$$

となり，

$$\text{任意の自然数 } n \text{ に対して}, -M \leqq x_n \leqq M$$

がいえて，収束する数列は有界であるが証明された．

この有界性を使って，高校時代のなじみの収束する数列の公式が証明できる．

1.14.6　収束する数列の極限値の四則演算の公式

$\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ であるとき，

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = a \pm b$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = ab$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}$　(ただし，$y_n \neq 0,\, b \neq 0$)

【解説】

これらの 3 つの公式は，高校の教科書にも登場し，私たちの大学受験でもお世話になった極限の公式で，条件 (仮定) $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim_{n\to\infty} y_n = b$ という仮定がなければ，これらの公式は成り立たない．たとえば，$\{x_n\} = \{n+1\}$，

$\{y_n\} = \{n\}$ とすると，$\{x_n - y_n\} = \{1\}$ となり，$\{x_n - y_n\}$ は 1 に収束するが，また $\lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n$ は $\infty - \infty$ と不定形になり，極限値はわからない．つまり，lim の線形性は，各数列は収束するということがはじめて仮定にあって成り立つのである．そしてまた数列の四則演算でできた新しい数列は，全く別の新しい数列ができるということを理解してほしい．

これらの公式は高校の教科書にもきちんと掲載されているものの，先ほどのはさみうちの定理と同様に証明がかかれていない．なぜならこれらの証明にも $\varepsilon - m$ 論法が必要だからである．これらの公式の証明には，大抵の大学の解析学の本，イプシロンデルタ論法関連の本に証明が載っていて，自分でも証明できるようになる必要がある．ちなみに参考文献 [2, p.10-14] を参考にするとよいだろう．とても詳しく証明が載っている．まずは，イメージをつけるという意味で，(ii) の証明からしよう．

(ii) の【証明】

まず気をつけておかないといけないのは，解説の部分でも述べたように，数列 $\{x_n y_n\}$ は全く新しい形にかける数列で，$\{x_n y_n\}$ が ab に収束することを証明するには，図 1-18 のようなイメージをもたなくてはいけない．

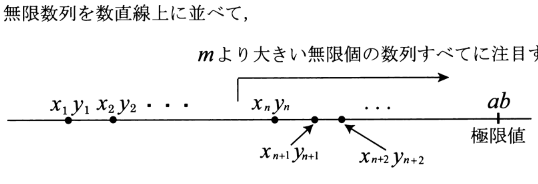


図 1-18　$\{x_n y_n\}$ の数直線上でのイメージ

仮定が，$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ かつ $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ であるから，

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists m, \quad \forall n > m \quad : |x_n - a| < \varepsilon, |y_n - b| < \varepsilon$$

が成り立つ．

証明することは，$\forall\varepsilon' > 0$ に対して，ある数 m より大きい自然数 n 全てを対応させた $x_n y_n$ すべてが，$|x_n y_n - ab| < \varepsilon'$ を満たす，ということを示せば

よい．

$$
\begin{aligned}
|x_n y_n - ab| &= |(x_n - a)y_n + a(y_n - b)| && \text{(1-25)}\\
&\leqq |x_n - a||y_n| + |a||y_n - b| && \text{(1-26)}\\
&< \varepsilon|y_n| + |a|\varepsilon = (|y_n| + |a|)\varepsilon && \text{(1-27)}
\end{aligned}
$$

である．ここで，$(|y_n| + |a|)$ は n を含んでおり，定数でない．仮定から，$\{y_n\}$ は収束するので，節 1.14.5 より有界であるから，$|y_n| < K$ となる定数 K がとれる．よって，

$$|x_n y_n - ab| < (K + |a|)\varepsilon$$

これで証明が終わりであるが，本当にこれで収束することがいえたのか，もう 1 度整理して定義通りに収束の証明ができているのか清書してみよう．

【証明の清書】

$x_n y_n$ が ab に収束することを証明するのは $\forall\varepsilon' > 0$ に対して，ある数 m より大きい自然数 n すべてを対応させた数列の項 $x_n y_n$ が，$|x_n y_n - ab| < \varepsilon'$ を満たす，ということを示せばよい (図 1-18 を参照)．つまり，
$x_n y_n, x_{n+1} y_{n+1}, x_{n+2} y_{n+2}, \cdots \in (ab - \varepsilon', ab + \varepsilon')$ とできるスタートライン「ある数」m を見つけられることを示せばよい．

$\varepsilon' = (K + |a|)\varepsilon$ とおくと，$\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ が収束するという仮定から，$\varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{K + |a|}$ に対しては，ある数 m が存在して，$n > m$ を満たす自然数すべてを対応させた数列の項は，

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon'}{K + |a|}, \qquad |y_n - b| < \frac{\varepsilon'}{K + |a|}$$

を満たしている．

よって，$\varepsilon' = (K + |a|)\varepsilon$ とおくと，ある数 m として，先ほどの m をとれば，$n > m$ 満たす自然数すべてを対応させた数列の項は，

$$
\begin{aligned}
|x_n y_n - ab| &< |x_n - a|K + |a||y_n - b|\\
&< \frac{\varepsilon' K}{K + |a|} + \frac{\varepsilon' |a|}{K + |a|} = \varepsilon'
\end{aligned}
$$

となるので，$x_n y_n$ が ab に収束することが証明された．

(iii) の【証明】

ここでも，数列 $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ が図 1-18 のような数直線上にあるイメージをもっておこう．(ii) より，$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ が収束するとき，$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$ がいえたので，$\{y_n\}$ が収束するとき，$\dfrac{1}{y_n}$ も $\dfrac{1}{b}$ 収束するということがいえれば，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \frac{1}{\lim_{n\to\infty} y_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

となり証明できることになる．よって，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} = \frac{1}{b} \ \ (\text{ただし}, y_n \neq 0, b \neq 0)$$

を証明しよう．

仮定より，$\{y_n\}$ が収束するので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある数 m が決まり，$n > m$ を満たす自然数 n すべてを対応させた各数列の項は，$|y_n - b| < \varepsilon$ を満たすので，

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n| \cdot |b|} < \frac{\varepsilon}{|y_n| \cdot |b|}$$

となり，$|y_n|$ は n をふくんでいるので定数でないから，ここでたとえば，$\varepsilon < \dfrac{|b|}{2}$ にとっておこう．このとき，m より大きい自然数すべてを対応させた数列の項は，

$$y_n \in \left(b - \frac{|b|}{2}, b + \frac{|b|}{2}\right)$$

である．$b > 0$ のときは，$\dfrac{b}{2} < y_n < \dfrac{3}{2}b$ であり，$b < 0$ のときは，$\dfrac{3}{2}b < y_n < \dfrac{b}{2}$ であるので，まとめると

$$\frac{|b|}{2} < |y_n| < \frac{3}{2}|b|$$

となる．

$$\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|}$$

であるから，

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n| \cdot |b|} < \frac{2\varepsilon}{|b|^2}$$

となり，あとは (ii) を使って，証明できる．

【補足】

この証明の流れが理解できるであろうか．念のため補足をしておく．最後の部分を説明すると，y_n は b に収束するので，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，ある m がとれ，$\forall n > m$ に対応する数列は，

$$y_n,\, y_{n+1},\, y_{n+2}, \cdots \in (b - \varepsilon,\, b + \varepsilon)$$

(ただし，$\varepsilon < \dfrac{|b|}{2}$) である)．これは $\varepsilon < \dfrac{|b|}{2}$ を満たす任意の ε という意味ではなくて，ε として，$\dfrac{|b|}{2}$ より大きいものをとったとき，たとえば，$\varepsilon = 10|b|$ をとったとしても，$\varepsilon < \dfrac{|b|}{2}$ に対してとれるある数「m」をとると，$\forall n > m$ に対して

$$y_n,\, y_{n+1},\, y_{n+2}, \cdots \in (b - \varepsilon,\, b + \varepsilon)$$

が成り立つという意味である．つまり，$\varepsilon < \dfrac{|b|}{2}$ に対してとれるある数「m」をとってさえいれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$y_n,\, y_{n+1},\, y_{n+2}, \cdots \in (b - \varepsilon,\, b + \varepsilon)$$

とできるということを意味している．

この証明の流れを清書してみよう．

$\forall\varepsilon' = \dfrac{2\varepsilon}{|b|^2} > 0$ に対して，「ある数」m の選び方であるが，これは，y_n が b に収束することがわかっているので，$\varepsilon = \dfrac{\varepsilon'|b|^2}{2}$ に対して成り立つ (つまり，$\varepsilon < \dfrac{|b|}{2}$ に対して成り立つ) m をとっていれば，$\forall n > m$ に対して，$|y_n - b| < \varepsilon$ がいえ，しかも $\dfrac{1}{|y_n|} < \dfrac{2}{|b|}$ もいえるので，よって，

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n| \cdot |b|} < \frac{\varepsilon}{|y_n| \cdot |b|} = \varepsilon'$$

となり，$\dfrac{1}{y_n}$ は $\dfrac{1}{b}$ に収束することがいえたのである．

最後に一番簡単な？(i) の証明をしよう．この数列 $\{x_n \pm y_n\}$ も図 1-18 のような数直線上にあるイメージをもっておこう．

(i) の【証明】

仮定より，$\lim_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim_{n\to\infty} y_n = b$ であるから，

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ に対して}, \exists m_1\text{が存在して}, \forall n > m_1,\ |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ に対して}, \exists m_2\text{が存在して}, \forall n > m_2,\ |y_n - b| < \varepsilon$$

ここで $m = \max\{m_1, m_2\}$ をすると ($\max\{m_1, m_2\}$ は，m_1 と m_2 の大きい方を選ぶということ)，

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ に対して}, \exists m \text{ が存在して}, \forall n > m,\ |x_n - a| < \varepsilon,\ \text{かつ}\ |y_n - b| < \varepsilon$$

となる．よって，m より大きい自然数すべてを対応させた数列の項は，

$$\begin{aligned} |(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| &= |(x_n \pm a) - (y_n \pm b)| \\ &\leqq\ |x_n - a| + |y_n - b| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

よって，$\{x_n \pm y_n\}$ は $a \pm b$ に収束することが証明された．

系：$\lim_{n\to\infty} a_n^2 = a^2$

(ii) で，$y_n = x_n$ とおけばよい．

コメント

この証明では三角不等式 $|a+b| \leqq |a| + |b|$ をふんだんに使ったことを注意しておく．

さて収束する数列は有界であるという特徴を生かして，数列の極限の四則演算の線形性を証明をした．有界だけでは収束は保証できないということを

述べたが，有界にさらに単調増加 (減少) という条件を付け加えれば，その数列は収束するということがいえる．この有界で単調増加 (減少) の数列の収束は，大学入試でお世話になった人もいるのではないだろうか．高校時代では，$\varepsilon - m$ 論法を学んでないので証明はできないが，暗黙の了解として使ってもいいともいわれた定理である．ここでは，有界で単調増加 (減少) の数列の収束について説明していくことにする．まずは言葉の定義を紹介してから，証明することにしよう．

1.14.7　定義：単調増加 (減少) 数列

数列 $\{x_n\}$ が単調増加数列であるとは，

$$x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq x_4 \leqq \cdots$$

が成り立つときできある．また数列 $\{x_n\}$ が単調減少数列であるとは，

$$x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq x_4 \geqq \cdots$$

が成り立つときである．

次に証明するが,『上に有界かつ単調増加数列，または下に有界かつ単調減少数列であれば収束する』ことを証明するが，その前に具体的な有界かつ単調増加な数列の具体例を紹介しよう．

上に有界な単調増加数列の具体例

$$\{x_n\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots\right\}$$

は，上に有界な単調増加数列である．なぜなら，p.73 でも述べたように，任意の自然数 n に対して，

$$\frac{n}{n+1} < 100 \quad \Longleftrightarrow \quad 99n + 1 > 0$$

が成り立つからである．また

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

だから単調増加な数列である．この数列は 1 に収束する．

上に有界な単調増加数列の具体例

$$\{x_n\} = \{2, 2, 2, 2, 2, \cdots\}$$

は有界な単調増加数列である．なぜなら，$\{x_n\}$ の元は 2 のみなので，

$$x_n \leqq 2$$

であるので有界である．また，

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \cdots = 2$$

なので単調増加 (減少) である．この数列は 2 に収束する．

この有名な定理を証明するには，まだ上限や下限などのような専門的な言葉を定義しないといけない．言葉こそ難しいが，いろいろな具体例を出してイメージで理解しよう．

次に，p.73 の 1.14.4 で数列の有界について述べたが，一般の集合に対して有界というものを定義しよう (前出の有界の定義となんら変わらないが $\cdots$).

1.14.8 定義：上に有界・下に有界

実数からなる集合 M(この M は数直線上の部分集合，または数直線上にあると考えたらよい) がある．もちろんこの M は数列 $\{x_n\}$ と考えてもよい．

$$\forall x \in M \text{ に対して}, x \leqq a$$

であるような定数 a が存在するとき，M は**上に有界**といい，a を M の 1 つの**上界**という．注意することは，$\leqq$ とイコールがついているから，M に最大値があれば，それは M の最大値であると共に上界でもあるということである．また上に有界であれば，上界は無数にあることは安易に理解・想像できるであろう．具体例でいえば，p.74 の例 1.14.4 のように，上界はたくさん存在する．

また同様にして，

$$\forall x \in M \text{ に対して}, b \leqq x$$

であるような定数 b が存在するとき，M は**下に有界**といい，b を M の 1 つの**下界**という．

そして，M が上にも下にも有界のとき，単に M は有界であるという．

また

$$\forall x \in M, \exists p \in M \text{ に対して}, x \leqq p$$

が成り立つとき，p を集合 M の**最大値**といって，M の最大値を

$$\max M$$

とかき，

$$\forall x \in M, \exists q \in M \text{ に対して}, x \geqq q$$

が成り立つとき，q を集合 M の**最小値**といって，最小値を

$$\min M$$

とかく．

上界と最大値，下界と最小値の定義の違いがわかるであろうか．ようは上界・下界は**必ずしも**集合 M に入っている必要がなく，最大値・最小値の値は**必ず**集合 M の中にないといけないのである．

上界も下界も無数にあるから，一番興味あるところは，上界の最小値であり，下界の最大値である．

1.14.9　定義：上限・下限

M の上界の最小数を**上限**といって，

$$\sup M$$

とかき，M の下界の最大数を**下限**といって，

$$\inf M$$

とかく．

たくさん定義が出てきたので，それでは具体例で見ることにしよう．ここでは集合 M は数直線上にあると考えるとよい (M は数直線 R の部分集合と考えたらよい)．

上限・下限の具体例

$$\text{数列}\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \right\}\text{の上限・下限など}$$

この数列は，p.74 の 1.14.4 より上にも下にも有界で (先ほども述べたが，$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ は，R 上の部分集合と考えたらイメージしやすい．R 上に並べて考えると考えやすい)，

$$\sup\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = 1, \qquad \inf\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \frac{1}{2}$$

で，

$$\max\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \text{なし}, \qquad \min\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \frac{1}{2}$$

である．また上界は 2，3, 100 など無数にあるし，下界も 0，-5，-100 など無数にある．

上限・下限の具体例

閉区間 $[-3, 8]$ の上限・下限など

この閉区間は上にも下にも有界で，

$$\sup[-3, 8] = 8, \qquad \inf[-3, 8] = -3$$

で，

$$\max[-3, 8] = 8, \qquad \min[-3, 8] = -3$$

である．また上界は 10，20, 100 など無数にあるし，下界も -10，-50，-100 など無数にあるし，上限と最大値，下限と最小値が一致する．

上限・下限の具体例

開区間 $(-3, 8)$ の上限・下限など

この開区間は上にも下にも有界で，

$$\sup(-3, 8) = 8, \qquad \inf(-3, 8) = -3$$

で，

$$\max(-3, 8) = \text{なし}, \qquad \min(-3, 8) = \text{なし}$$

である．また上界は 10，20, 100 など無数にあるし，下界も -10，-50，-100 など無数にある．

上限・下限の具体例

数列 $\{x_n\} = \{2n\} = \{2, 4, 6, \cdots\}$

は下に有界であるが，上に有界ではない．

$$\sup\{2n\} = \text{なし}, \qquad \inf\{2n\} = 2$$

で，

$$\max\{2n\} = \text{なし}, \qquad \min\{2n\} = 2$$

である．また上界はなしだが，下界は -10，-50，-100 など無数にある．

以上の具体例を見るとわかるだろうが，**集合 M が上に有界であれば必ず上限 $\sup M$ が存在するし，下に有界であれば必ず下限 $\inf M$ が存在する**ということがわかるであろう．実際そうなのであるが，これは定理である．証明は実数の連続性 (デデキントの公理) を用いて証明されるのであるが，ここでは直感でもすっきりわかるので証明をしないで使っていくことにする．

1.14.10 上限・下限の存在定理

集合 M が上に有界であれば必ず上限 sup$M$ が存在し，下に有界であれば必ず下限 inf$M$ が存在する．

それではいよいよ証明に入ろう．

1.14.11 定理：上に有界かつ単調増加数列，または下に有界かつ単調減少数列であれば収束する (有界な単調数列は収束する)

この大事な性質 (公式) は，高校の範囲では証明されない．なぜなら，証明に $\varepsilon - m$ 論法や上限・下限などを用いるからである．ここでは,「上に有界かつ単調増加数列は収束する」のみを証明しよう．

【証明】

$M = \{x_n\}$ を数直線 R 上に用意すると，$\{x_n\}$ は仮定より上に有界より，定理 1.14.10 から，sup$M$=α が存在する．

この定理 1.14.10 より，

$$\alpha = \mathrm{sup}M$$
$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (1)\forall x_n \in \{x_n\} : x_n \leqq \alpha = \mathrm{sup}M \\ (2)\forall \varepsilon > 0 \text{ とすると},\alpha - \varepsilon \text{はMの上限ではないので}, \\ \quad \exists x_m \in \{x_n\} :\alpha - \varepsilon < x_m \text{が成り立つ}. \end{cases}$$

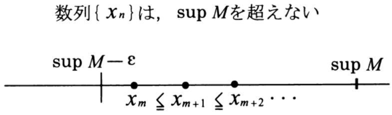


図 1-19 sup$M$ と数列の様子

よって,

$$\alpha - \varepsilon < x_m \leqq x_{m+1} \leqq x_{m+2} \cdots \leqq \alpha$$

つまり，ある数 m がとれ，$n > m$ を満たす自然数すべてを対応させた数列の項は,

$$\alpha - \varepsilon < x_n \leqq \alpha < \alpha + \varepsilon$$

を満たし，つまり，$x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots \in (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ ということで，

$$-\varepsilon < x_n - \alpha < \varepsilon$$

となって，$n > m$ を満たす自然数すべてを対応させた数列の項は

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon$$

となり ($\varepsilon - m$ 論法の定義のところでも述べたように，ワンセットである)，x_n は上界 $\alpha = \sup M$ に収束する．同様にして，下に単調減少数列は，下界に収束する．

これで，高校時代大学入試で得する数列の極限の定理として使ってきた定理がここではじめて証明できたわけである．

コメント

上に有界かつ単調増加数列は収束することがわかったが，このとき収束数列はすべてそれに当てはまるのかを考えるのが，大学の数学を学ぶ上で，心構えとして大事である．定理が出たら，反例を考える習慣をつけることが大事である．ちなみに，p.38 の例 1.11.2 で，収束する数列 $\dfrac{(-1)^n}{n}$ は，図 1-20 のようにジグザグしながら (単調増加でなく)0 に収束するので，必ずしも収束する数列は，単調増加とは限らないことがいえる．

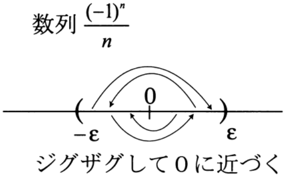


図 1-20　ジグザグしながら収束する

それでは，具体例をみていくことにしよう．まず次のような高校の教科書に掲載されている数列の極限値の問題を考えよう．

確認問題：一般項の求められる数列の極限値の問題

$$a_1 = 2 \quad , a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3 \text{ で表される数列 } \{a_n\} \text{ の極限値}$$

【解答】

この問題は，高校の教科書に載っていた問題であるが，これは数 III を履修した人にとっては基本中の基本の問題で，一般項は，

$$a_n = -4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 6$$

となるから，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 6$$

である．

この漸化式は一般項を簡単に求めることができて，簡単に極限値を求めることができた．この問題のように，一般項が求められるような数列の極限値を求めるときは高校時代の解き方のように直感で十分である．しかし，次のような問題を考えよう．これは導入問題付き以外では，高校の教科書や参考書には単独では絶対に出題されない問題である．

有界かつ単調増加の数列の例

$a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 1}$ で表される数列 $\{a_n\}$ の極限値が存在するのであれば，その極限値を求めよ．

【解説】

少し問題形式を若干変えた．大事なところは,「極限値が存在するのであれば」という部分である．一般項がわかれば，収束するかどうかはわかるだろうが，まずこの数列の一般項を求めることができない．ということは，先ほどの問題 1.14.11 のように，簡単には一般項を求めることができず，一般項から収束性も極限値を求めることができないのである．しらみつぶしに，

$$a_1 = 1, a_2 = \sqrt{3},\ \ a_3 = \sqrt{4\sqrt{3} - 1},$$

ともとめても数列の第 3 項で行き詰まってしまう．それでは，どうするのか．定理 1.14.11 で述べた

定理：有界な単調数列は収束する

を使って，収束性を調べるのである．それでは証明に入ろう．

【解答】

収束するかどうかは，有界かつ単調増加 (減少) を調べる．

(i) 単調性について

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \sqrt{4a_{n+1} - 1} - \sqrt{4a_n - 1} \tag{1-28}$$

$$= \frac{4(a_{n+1} - a_n)}{\sqrt{4a_{n+1} - 1} + \sqrt{4a_n - 1}} \tag{1-29}$$

ここで (1-29) であるが，分母は正であるから，$a_{n+2} - a_{n+1}$ と $a_{n+1} - a_n$ は同符号である．よって，$a_1 = 1 < a_2 = \sqrt{3}$ であるから，帰納的に，

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \cdots$$

がいえる．つまり単調増加数列であることが証明できた．

(ii) 有界性について

この数列がいくら以下かはっきりわからないので，だいたいでよいが，たとえば 7 より小さいと仮定しよう (別に，10 でも，100 でもよい．ようはきちんとした数字がわからないのである程度大きな数字以下と仮定するのである．) 帰納法で，$x_1 < 7$ で，$x_k < 7$ が成り立つと仮定すると，

$$a_{k+1} = \sqrt{4a_k - 1} < \sqrt{4 \cdot 7 - 1} = 3\sqrt{3} < 7$$

と $n = k + 1$ でも成り立ったので，上に有界である．

以上の結果から，有界かつ単調増加数列であることがわかったので，数列は収束することが証明できた．次にその極限値を求めよう．

数列 $\{a_n\}$ 極限値を α とおく．つまり，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ である．このとき，この数列の項 a_n が α に収束すれば，a_{n+1} も α に収束する．この意味がわかるであろうか．具体的な例は，p.98 の大学入試問題 1.15.1 の解説で述べてある．

まずはこれを証明しよう．本当に明らかであるが，これを証明するのが数学である．簡単なものと思っていても案外手こずるものである．

$\{a_n\}$ は有界な単調増加の数列より，収束するわけであるが，収束値は数列の上限であるから

$$\sup\{a_n\} = \alpha$$

である．また，

$$\cdots a_n < a_{n+1} < a_{n+2} \cdots \leqq \alpha$$

である．よって，

$$a_n - \alpha < a_{n+1} - \alpha < 0$$

が成り立つ．つまり，

$$|a_n - \alpha| > |a_{n+1} - \alpha|$$

となる．

よって，$\forall \varepsilon > 0$ に対して，$\exists m, \forall n > m$

$$|a_{n+1} - \alpha| < |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立ち，a_{n+1} も α に収束することが証明された．

以上の結果から，極限値 α の値を求めるのに，

$$\alpha = \sqrt{4\alpha - 1} \qquad \text{(1-30)}$$

とおいて α の値を求めてよいかというと，結果的にはよいのであるが，一言付け加えておこう．,

$$a_n \to \alpha \text{だからといって}, \sqrt{4a_n - 1} \quad \to \sqrt{4\alpha - 1}$$

と簡単にしてよいのかということである (証明は，最後に付け加えるとして，これが成り立つとして話を進めよう)．

よって，(1-30) を解くと，$\alpha = 2 \pm \sqrt{3}$ を得るが，$\forall n$ に対して $a_n \geqq 1$ であるから，p.70 の定理 1.14.2 より $\alpha \geqq 1$．したがって極限値は，

$$\alpha = 2 + \sqrt{3}$$

である．

【補足 1】

$$a_n \to \alpha \quad \text{のとき}, \sqrt{a_n} \quad \to \sqrt{\alpha}(\text{ただし}, a_n, \alpha \geqq 0)$$

が成り立つことを証明しよう．直感的に明らかであるが，これをきちんと証明できるようになることが大事である．

【補足 1】の証明

$\alpha \geqq 0$ であるが，ここでは $\alpha > 0$ として証明しよう．証明のアイデアは，p.76 の定理 1.14.6 の (iii) の証明と同じような考えを使えばよい．

まずは，

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{\alpha}| = \left| \frac{a_n - \alpha}{\sqrt{a_n} + \sqrt{\alpha}} \right|$$

と変形できる．

a_n が α に収束するので，$\forall > 0$ に対して，$\exists m$ がとれ，$\forall n > m$ に対して，$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となる．ここでたとえば，$\varepsilon < \frac{1}{2}\alpha$ となるようにとって M を定めておけば，$\forall n > M$ に対して，$\frac{\alpha}{2} < a_n < \frac{3}{2}\alpha$ で，仮定よりすべて正であるから，

$$\sqrt{\frac{\alpha}{2}} < \sqrt{a_n} < \sqrt{\frac{3}{2}\alpha} \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{\alpha}} < \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)\sqrt{\alpha}} \tag{1-31}$$

が成り立つ．

よって，$\forall \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\frac{\sqrt{2}+2}{2}\sqrt{\alpha}}$ に対して，$\varepsilon < \frac{1}{2}\alpha$ となるようにとって M を定めておけば，$\forall n > M$ に対して，式 (1-31) が成り立ち，$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ がい

えるので

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{\alpha}| = \left|\frac{a_n - \alpha}{\sqrt{a_n} - \sqrt{\alpha}}\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{a_n} + \sqrt{\alpha}}$$
$$< \frac{\varepsilon}{\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)\sqrt{\alpha}} = \varepsilon'$$

となり，証明された．

【補足２】

【補足１】は，次のような定理・性質を使って考えてもよい．

> $y = f(x)$ が $x = \alpha$ で連続であるとき (つながっているとき)，α に収束する数列 $\{x_n\}$ について，数列 $f(x_n)$ が $f(\alpha)$ に収束する．つまり，
> $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(\alpha)$$
> が成り立つ．

という連続関数と収束する数列の関係の定理を使っているのである (ちなみに，この定理の意味は関数 $y = f(x)$ が $x = \alpha$ で連続であるとは，α にあらゆる近づき方をしても $f(x)$ は $f(\alpha)$ に収束するという意味である．詳しくは参考文献 [1, p.110-119] を参照)．だから，この場合に当てはめると，$f(x) = \sqrt{4x-1}$ は $x \geqq \frac{1}{4}$ で定義できていて，この範囲で連続である (グラフはつながっている)．p.70 の収束する数列と極限値の大小関係と仮定 $x_1 = 1$ と単調増加から $\alpha \geqq 1$ である．よって，もちろん $f(x) = \sqrt{4x-1}$ は極限値 α で連続である (つながっている) から，

$$\sqrt{4x_n - 1} \quad \to \sqrt{4\alpha - 1}$$

がいえるとしてもよい．ただ，究極な議論をすれば，$f(x) = \sqrt{4x-1}$ は $x \geqq \frac{1}{4}$ で連続であることを，連続性のイプシロンデルタ論法で証明しないといけない．

【注意】

最後収束することがわかったので，$a_n = a_{n+1} = \alpha$ として，極限値 α を求めたが，大前提は収束するということである．なんでもかんでも $a_n = a_{n+1} = \alpha$ とおいて，α が存在するからそれが極限値というのは間違いである．たとえば，次のような数列を考えると明らかである．

$$a_{n+1} = 3a_n + 6,\, a_n = 1$$

$a_n = a_{n+1} = \alpha$ とおいて，$\alpha = -3$ と求まっても，これは極限値ではない．なぜならこの数列の一般項は，

$$a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 3$$

でこの数列は発散して，極限値を持たないからである．もちろんこの数列が発散することをきちんと証明しようと思えば，$\varepsilon - m$ 論法を用いなければならない．

なんだかんだいって，極限値を求めるには，高校時代の解法が主となるのである．今は極限値より収束するかどうかが大事なのである．

コメント

高校時代は，定理 1.14.11 を用いて解くような問題は高校の範囲外なので，小問で必ず誘導がつく．大学入試でも誘導付きで出題されることがある．それを p.103 の問題 1.15.3 で紹介している．

高校の参考書では，一般項を求めることのできない数列の漸化式 $x_{n+1} = f(x_n)$ の極限値は，極限値が存在すると仮定して，その極限値を α として，方程式 $\alpha = f(\alpha)$ を解いて値をだし，$\lim_{n\to\infty} |x_n - \alpha| = 0$ を証明すればよいというような受験用のパターンがある．まさにこれは，定理 1.14.11 を意識した問題である．

収束する数列の例

$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ のとき，

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} \text{ は,}\alpha\text{に収束する}$$

【解説】

$\varepsilon - m$ 論法を学んだとき，この有名な数列の収束を証明する数学書は多い．この本も例外ではない．

まず，問題の意味を考えよう．p.23 で紹介した数列 $a_n = \dfrac{3n^2-6n}{2n^2+5n-4}$ を使って解説しよう．この数列は，$-1, 0, \dfrac{9}{29}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{45}{71} \cdots$ であり，$\dfrac{3}{2}$ に収束する数列である．ここで，

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

と定義すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{3}{2}$ である．まずはこの数列の意味を考えよう．

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{x_1}{1} = -1 \\
y_2 &= \frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{1}{2} \\
y_3 &= \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = -\frac{20}{87} \\
y_4 &= \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} = -\frac{11}{232} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

であり，この数列 $\{y_n\}$ が $\dfrac{3}{2}$ に収束するということである．

この $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ のとき，$y_n = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$ は，α に収束するという証明は，もちろん高校時代に学ぶはずもなく，大学入試にヒントなしでは，いくら具体的な数列が与えられたとしてももちろん出題されることはないであろう．

なんとなく直感的にはそうなる気がするが，当たり前というには少し気が引けるようなレベルである．この収束を確実なものにするために，$\varepsilon - m$ 論法を用いるのである．収束する数列の特徴を式で表した $\varepsilon - m$ 論法を用いて証明できれば，確実なものとなるのである．それでは証明に入ろう．その前に，この数列の図 1-21 のようなイメージはきちんとえがいておこう．

無限数列を数直線上に並べて，

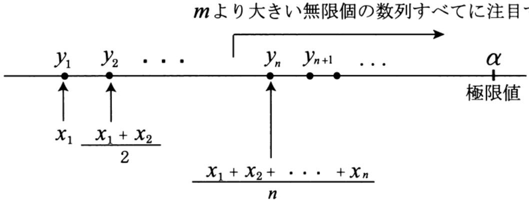


図 1-21　$\{y_n\}$ の数直線上でのイメージ

【証明】

$\forall\varepsilon>0$，$\exists m$，$\forall n>m$ に対して，$y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \cdots \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ であること，つまり，$|y_n-\alpha|<\varepsilon$ を示せばよい．

まず，

$$\begin{aligned}|y_n-\alpha| &= \left|\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n}-\alpha\right|\\ &= \left|\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n-n\alpha}{n}\right|\\ &= \left|\frac{(x_1-\alpha)+(x_2-\alpha)+(x_3-\alpha)+\cdots+(x_n-\alpha)}{n}\right|\end{aligned}$$

である．

ここで，仮定から $\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha$ なので，$\forall\varepsilon'>0$ に対して，$\exists m'$，$\forall n>m'$ に対して $|x_n-\alpha|<\varepsilon'$ とできるのであるが，気をつけないといけないことがある．それは，具体例でいうと，たとえば $\forall\varepsilon'>0$ に対して $m'=3$ として，$\forall n>3$ に対応する数列の項は，$|x_4-\alpha|<\varepsilon'$, $|x_5-\alpha|<\varepsilon'$, $\cdots$ を満たしているとなるので，一般に，

$$\left|\frac{(x_1-\alpha)+(x_2-\alpha)+(x_3-\alpha)+\cdots+(x_n-\alpha)}{n}\right|$$

の分子の部分で，$\exists m'$，$\forall n>m'$ に対して，$|x_n-\alpha|<\varepsilon'$ を満たしている部分がいくつかあるのであるが，このままではいくつあるのかわからないの

で，$|x_n - \alpha| < \varepsilon'$ を満たしている部分が $n - p$ 個あるとしよう．つまり，

$$\left|\frac{(x_1 - \alpha) + \cdots + (x_p - \alpha) + (x_{p+1} - \alpha) + \cdots + (x_n - \alpha)}{n}\right|$$

とわけることができ (つまり，p は $p < m'$ を満たす最大の自然数)，この式は三角不等式より，

$$\left|\frac{(x_1 - \alpha) + \cdots + (x_p - \alpha)}{n}\right| + \frac{|x_{p+1} - \alpha| + \cdots + |x_n - \alpha|}{n}$$

より小さいということがいえて，

$$\begin{aligned} &|y_n - \alpha| \\ &< \left|\frac{(x_1 - \alpha) + \cdots + (x_p - \alpha)}{n}\right| + \frac{|x_{p+1} - \alpha| + \cdots + |x_n - \alpha|}{n} \\ &< \left|\frac{(x_1 - \alpha) + \cdots + (x_p - \alpha)}{n}\right| + \frac{(n-p)\varepsilon'}{n} \end{aligned}$$

が成り立つ．

ここで $\left|\dfrac{(x_1 - \alpha) + \cdots + (x_p - \alpha)}{n}\right|$ の分子の部分は n に無関係な定数で，

$$\frac{\text{定数}}{n}$$

と表され，この数列は 0 に収束する数列であるから，$\forall \varepsilon' > 0$ に対して，$\exists m''$，$\forall n > m''$ に対して

$$\left|\frac{(x_1 - \alpha) + \cdots + (x_p - \alpha)}{n}\right| < \varepsilon'$$

とできる．よって，$m = \max\{m', m''\}$ とすると，

$$\frac{(n-p)\varepsilon'}{n} < \varepsilon'$$

に注意すると，

$$|y_n - \alpha| < \varepsilon' + \varepsilon' = 2\varepsilon'$$

となり，最初に与えた ε に対して，$\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$ ととっておけば，
$m = \max\{m', m''\}$ を選べば，$\forall n > m$ に対して，$|y_n - \alpha| < \varepsilon$ とでき，収束することが証明できたのである．

以上でいろいろな公式を紹介して，その都度証明をしてきたが，すべて収束する数列の特徴を式で表した $\varepsilon - m$ 論法が必要だということがわかったであろう．ここまでのことがある程度理解できたら，収束する数列はどのような特徴があるかイメージできたのではないだろうか．最後に，パターンで解いていた大学入試の問題に深みをもたせて考えて解くことにしよう．

1.15　大学入試の極限の問題

1.15.1　滋賀医大

(1) 数列 $\{a_n\}$ が $n \to \infty$ のとき，ある値 α に収束するならば，数列 $\{a_{n+1}\}$，$\{a_{2n}\}$，$\{a_{3n}\}$ は $n \to \infty$ のときどうなるか (答えのみ．証明不要)

(2) 定数 θ に対して数列 $\{\cos n\theta\}(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が収束するならば，θ は 2π の整数倍であることを証明せよ．

【解説】

この問題は，大学で学ぶ内容を，大学入試として出題しているような問題である．しかも，答えのみ，証明不要というところがいかにも大学入試らしいし，というより $\varepsilon - m$ 論法を学んでいないので証明できない．高校では，p.63 の節 1.13.1 で述べたような,「限りなく大きくする」という意味にはどういう意味を含んでいるのかというようなことも考えることもない．だからこそ，特に (1) は直感で答えを求めさせている．この (1) は「限りなく大きくする」という意味にはどういう意味を含んでいるのかを問いかける問題である．数列 $\{a_n\}$，$\{a_{n+1}\}$，$\{a_{2n}\}$ の数列の意味について具体例で理解しておこう．たとえば，$\{a_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\} = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots,\right\}$ とおくと，

$$\{a_{n+1}\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots,\right\}$$

$$\{a_{2n}\} = \left\{\frac{1}{2n}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \cdots,\right\}$$

$$\{a_{3n}\} = \left\{\frac{1}{3n}\right\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \cdots,\right\}$$

という意味である．どの数列も 0 に収束する．つまり，$\{a_n\}$ が収束すれば，n を $2, 3, 4, \cdots$ と大きくしようとも，n を $2, 4, 6, \cdots$, と大きくしようとも，n を $3, 6, 9, \cdots$, と大きくしようとも必ずそれらの自然数に対応する数列でできる部分列は，同じ数に収束するということである．つまり，元の数列が収束したら，どんな大きい仕方をしても収束するという意味である．ここでは，$\varepsilon - m$ を使ってきちんと証明しよう．

また，(2) の意味も考えてみよう．$\cos\theta$ は，高校でも学んだように，-1 から 1 をジグザグに点をとっていくグラフであった．つまり，数列として $\{\cos n\theta\}$ を考えたとき，収束するには，この問題の場合

$$\{\cos(n \cdot 2\pi k)\} = \{1, 1, 1, \cdots\}$$

のすべての項が 1 の数列しかないということをいっているのである．また，θ が定数というところがポイントである．

【解答】

(1) 仮定より，$\{a_n\}$ が収束するので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある数 m が存在して，$n > m$ を満たす自然数すべてを対応させた数列の項は，$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ を満たす．このとき，その m に対して，n は自然数なので，$3n > 2n > n+1 > n > m$ が成り立つ．よってある数 m より大きい，3 の倍数の自然数すべて，2 の倍数の自然数すべて，n より 1 大きい自然数すべてをそれぞれ対応させた数列の項は，この $\{a_n\}$ の収束の証明に選んだ $\varepsilon > 0$ に対して，$|a_{n+1} - \alpha| < \varepsilon$，$|a_{2n} - \alpha| < \varepsilon$，$|a_{3n} - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つので，数列 $\{a_{n+1}\}$，$\{a_{2n}\}$，$\{a_{3n}\}$ は $n \to \infty$ のとき α に収束するということが証明された．

(2) (θ が定数というところがポイントである．)

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \cos n\theta = \alpha$ とおくと，

$$\cos 2n\theta = 2\cos^2 n\theta - 1,\quad \cos 3n\theta = 4\cos^3 n\theta - 3\cos n\theta$$

であるから，両辺 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}$ として，(1) より，

$$\alpha = 2\alpha^2 - 1,\ \text{かつ},\alpha = 4\alpha^3 - 3\alpha$$

それぞれ方程式を解いて，共通解は $\alpha = 1$ である (つまり,【解説】で説明したとおり，1 に収束する数列しかないということがいえた).

ここで,

$$\cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos\theta - \sin n\theta \sin\theta$$

で，$\sin^2 n\theta = 1 - \cos^2 n\theta$ より，$\lim_{n\to\infty} \sin^2 n\theta = 1 - 1^2 = 0$ となり，$\sin n\theta = 0$ であるから，$1 = 1 \cdot \cos\theta - 0 \cdot \sin\theta$ となり，$\cos\theta = 1$，つまり，$\theta = 2\pi k$(k は整数) となる.

1.15.2　山口大

2 つの数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ がともに正の無限大に発散し，どの項も 0 でないとする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n - b_n\}$ が正の無限大に発散するような，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の例を 1 組あげよ.

(2) 数列 $\{a_n - b_n\}$ が α に収束するとき，2 つの数列 $\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$，$\left\{\dfrac{a_n^2}{b_n} - \dfrac{b_n^2}{a_n}\right\}$ の極限を求めよ.

【解説】

まず仮定について考えていこう．どの項も 0 でないというのは，(2) で分数の極限値を考えているので，分母の項に 0 があったら考えられないので，そうならないようにしておくということである．また，a_n が正の無限大に発散するとき，$\dfrac{1}{a_n}$ が 0 に収束する証明を最後の【参考】に証明した.

(2) であるが，たとえば，$\{a_n\} = \{n+1\}$，$\{b_n\} = \{n\}$ とおくと，$\{a_n - b_n\} = \{1\}$ となり，$\{a_n - b_n\}$ は 1 に収束する数列とすることができる.

【解答】

(1)　$a_n = 3n$，$b_n = n$ とすればよい.

(2)

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{-(a_n - b_n) + a_n}{a_n} = -\frac{(a_n - b_n)}{a_n} + 1$$

であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$ と 0 に収束することに注意して，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}&=-\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}+\lim_{n\to\infty}1\\&=-\alpha\times 0+1=1\end{aligned}$$

と，1 に収束する．

また，

$$\begin{aligned}\frac{a_n^2}{b_n}-\frac{b_n^2}{a_m}&=\frac{a_n^3-b_n^3}{a_n\cdot b_n}\\&=\frac{(a_n-b_n)(a_n^2+a_n\cdot b_n+b_n^2)}{a_n\cdot b_n}\\&=(a_n-b_n)\left(\frac{a_n}{b_n}+1+\frac{b_n}{a_n}\right)\end{aligned}$$

と式変形できて，p.76 の (iii) の証明のときに，$\{b_n\}$ が b に収束するなら，$\dfrac{1}{b_n}$ は $\dfrac{1}{b}$ に収束することを証明した．よって，数列の逆数は，極限値の逆数に収束するのである．よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$ と，ともに 1 に収束することに注意して，各項はすべて収束するので，lim の線形性が使え，しかも積に分解でき，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n^2}{b_n}-\frac{b_n^2}{a_n}\right)&=\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\times\left(\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}+\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}\right)\\&=\alpha\times(1+1+1)=3\alpha\end{aligned}$$

と 3α に収束する．

lim を積に分配したり，線形性を使ったりして極限値を求めているが，あくまでも，各数列の項が収束するということを断っておかないといけないのである．このことはしっかり理解しておかないといけない．

【参考】

数列 $\{x_n\}$ において，番号 n を限りなく大きくすると，x_n が限りなく大きくなれば，これを

$$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$$

で表す．このとき，数列 $\{x_n\}$ は正の無限大に**発散する**という．これを，$\varepsilon - m$ 論法で定義すると次のようになる．

$\varepsilon - m$ 論法で発散を定義

数列 $\{x_n\}$ において，$\forall K > 0$ に対して，$\exists m$ がとれ，$\forall n > m$ に対して，

$$x_n > K$$

である．つまり，

$$x_n,\, x_{n+1},\, x_{n+2}, \cdots > K$$

が成り立つ

となる．

よって，a_n が正の無限大に発散するとき，$\dfrac{1}{a_n}$ が 0 に収束する証明をしよう．

数列 $\{a_n\}$ において，$\forall K > 0$ に対して，$\exists m$ がとれ，$\forall n > m$ に対して，

$$a_n,\, a_{n+1},\, a_{n+2}, \cdots > K > 0$$

より，この m より大きい自然数に対応する数列の項は

$$\frac{1}{a_n}, \frac{1}{a_{n+1}}, \frac{1}{a_{n+2}} \cdots < \frac{1}{K}$$

が成り立つ．つまり，

$$\frac{1}{a_n}, \frac{1}{a_{n+1}}, \frac{1}{a_{n+2}} \cdots \in \left(0 - \frac{1}{K}, 0 + \frac{1}{K}\right)$$

と同じであるから，この m より大きい自然数に対応する数列の項は

$$\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| < \frac{1}{K}$$

が成り立つ．故に，$\forall \varepsilon = \dfrac{1}{K}$ に対して，最初の $\forall K > 0$ に対して，$\exists m$ がとれ，$\forall n > m$ に対して，

$$\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| < \frac{1}{K}$$

がいえたので，0 に収束することが証明された．

1.15.3　都立大学

$4 \leqq a_1 < 12$，$a_{n+1} = 3 + \frac{1}{16}a_n^2 (n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする．

(1) $4 \leqq a_n < 12$，$a_n \geqq a_{n+1}$ を示せ．

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

【解答】

(これも一般項を求めることのできない数列である．問題のヒントから下に有界な単調減少数列であることを意識する)

(1) 最初に $4 \leqq a_n < 12$ を帰納法で証明しよう．$n = 1$ のときは，仮定より成り立つ．$n = k$ のとき成り立つと仮定すると，$16 \leqq (a_n)^2 < 144$ より，$4 \leqq a_{k+1} = 3 + \frac{1}{16}(a_k)^2 < 12$ となって，$n = k + 1$ のときも成り立つので，数学的帰納法よりすべての n について成り立つことが証明された．

また，$4 \leqq a_n < 12$ がいえるので，

$$a_n - a_{n+1} = \cdots = 1 - \frac{1}{16}(a_n - 8)^2 \geqq 0$$

がいえるので，$a_n \geqq a_{n+1}$ が証明された．

(以上より，下に有界な単調減少数列であることが証明されたので，この数列は収束する．)

(2)(収束することがわかったので，極限値を α とおいて，$\alpha = 3 + \frac{1}{16}\alpha^2$ を解くと，$\alpha = 4, 12$ を得る．p.70 の定理 1.14.2 より，$\alpha \geqq 4$ であるが 2 つとも可能性があるが，単調減少な数列であることを考慮して $\alpha = 4$ と予測して)

$$a_{n+1} - 4 = \frac{1}{16}(a_n)^2 - 1 = \frac{a_n + 4}{16}(a_n - 4)$$

であり，$4 \leqq a_n < 12$ と $\{a_n\}$ の単調減少性より，

$$a_{n+1} - 4 \leqq \frac{a_1 + 4}{16}(a_n - 4)$$

よって，

$$0 \leqq a_n - 4 \leqq \left(\frac{a_1+4}{16}\right)^{n-1}(a_1 - 4)$$

であり，$0 < \dfrac{a_1+4}{16} < 1$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 4$$

である．

以上で，$\varepsilon - m$ 論法の解説は終わるが，最初に述べたようにはじめて $\varepsilon - m$ 論法を学んだときに，式の意味がなかなか理解できない．そこで，私自身が式の意味をどう解決したのか，以下述べる内容は，私の体験談になる．しかし私自身全く蛇足だと思ってもいない．むしろ，いまから述べる内容が一番大事な節かもしれないと考えている．私と同じような悩みを持っている読者もおられるだろうと思って，敢えて紹介する．

1.16　筆者が考えてきた $\varepsilon - m$ 論法

まず，$n \to \infty$ のとき，$\{x_n\}$ は a に収束するということを，式で表したものとして，$\varepsilon - m$ 論法を学んだが，

> 高校時代まで n を大きくしたら $\{x_n\}$ は a に近づくと学んだのに，$\{x_n\}$ の方の範囲の ε の方が m より先にでているのは，順番が逆ではないか

と思ったのである．

つまりわかりやすくいえば，形だけ見ると $n > m$，$|x_n - a| < \varepsilon$ という形になっているので，$n > m$ となる m を大きくすればするほど，ε が小さくなるように定義すればよいのではないかということである．

これは私が学生時代に悩み続けた疑問である．実はこれが学生が一番疑問に思う悩みでないだろうかと思っている．p.13 の序論でも大学新入生にとってイプシロンデルタ論法はいろいろな理由があって難しいと述べたが，この

疑問こそが，実は $\varepsilon - m$ 論法，しいてはイプシロンデルタ論法を難しく感じさせている一番の悩みではないかと思っている．

確かに上にかいた私の学生時代に持ち続けてきた疑問は，高校時代に $n \to \infty$ という条件から問題を解いてきた身にとって，悩むのも無理がないと思っている．

たとえば，p.39 の各項が 1 だけの数列 (1-11) を考えよう．この数列であるが，この数列が 1 に収束することを，次のように証明した．

$$\forall\varepsilon > 0, \qquad \exists m = 1, \qquad \forall n > m \quad : \quad |a_n - 1| < \varepsilon$$

であった．

当時，これをはじめて学んだ私は，m を大きくしていくと，それに ε が連動して (つまり ε が m の関数であるということ) 小さくなっていくはずであるが，小さくなっていくかとそうではない．しかし，上の式で十分，数列 (1-11) が 1 に収束するということがいえている．つまりこのギャップこそが，先ほども述べたが，$\varepsilon - m$ 論法の理解の最大の妨げになっているのだと思う．

どうして，n が大きくなればなるほど，x_n は a に近づくというつまり，ε が小さくなっていくというような，高校生が感じるような (私自身も疑問に思った) 定義で式を表さないのだろうか．私はこれについていろいろ悩んだのである．以下，私なりの悩みの解決を紹介するが，以下，

$$n \to \infty \text{ のとき}, x_n \to a \tag{1-32}$$

という数列の極限を使って説明していくことにする．

私が学生時代，いろいろ $\varepsilon - m$ 論法学んだとき，次のように定義すればいいのではないかと思った．(1-32) の式を**順番**に記号で表していけばよいので，

> n が大きくなればなるほど，それに対応して x_n と a の距離がいくらでも小さくなる

ということだから，$n \to \infty$ という条件のもとで解くのであるから，n が大きくなるのにともない，ε が小さくなるということで ($n \to \infty$ とすれば，x_n

と a の距離がいくらでも小さくなるということで)，m を先に出して，ε を m に連動させて (つまり，ε は m の関数として)，

> 任意の m に対して (m を任意にすることによって，m はいくらでも大きくできて，それに伴い n も大きくなるということ)，$n > m$ を満たす全ての自然数に対応する x_n は，m の関数 $\varepsilon(m) > 0$ に対して，
>
> $$|x_n - a| < \varepsilon(m)$$
>
> となる任意の $\varepsilon(m) > 0$ がとれるとき，x_n は a に収束するという.

と定義すればよいのではないかと思ったのである．一見これで全て良さそうであるが，実はいくらでもつっこみどころがある (完全な形とはいえないということである).

しかしよく考えてみると，別に $n > m$ を満たす自然数 n は，ある数 m よりも大きければいくらでも大きくできるので，m は任意にしなくてもよいのである.

m を任意にしてしまうと，負の数も考えることができて，n を自然数と仮定している以上は全く意味がない.

とりあえず m を任意にしてしまって，m はいくらでも大きくできると感じたとしても，たとえば p.30 の数列 $\dfrac{n}{n+1}$ の極限値が 1 である証明だが,

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{1}{m}$$

$n > m$ より，$\dfrac{1}{m} > \dfrac{1}{n}$ で，$\varepsilon(m) = \dfrac{1}{m}$ とおく．このとき，m を大きくすると (m が先に与えられている)，もちろん n も大きくなり，このとき $\varepsilon(m) \to 0$ となる．これは，つまり n が大きくなると，$\dfrac{n}{n+1}$ が 1 に近づいているという実感ができて私自身完璧な定義ではないかと思ったのであるが，実はこれもいくらでもつっこみどころがある．なぜなら,

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{m}$$

が成り立つということは,

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{m} + 1$$

も常に成り立つということで，$\varepsilon(m) = \dfrac{1}{m} + 1$ とおいてもよいということでこの場合，$\dfrac{n}{n+1}$ と 1 の距離がある距離 1 以上縮まらないことを意味していて，つまり収束しないことを意味している．だから，ε が m の関数でしかも減少関数であっても，収束するという保証が得られないのである．

だから,「任意の $\varepsilon(m)$ がとれるとき」という部分を,「0 に収束する $\varepsilon(m)$ がとれるとき」としたらうまくいくのではないかと思ったが，収束することを定義しているのに，定義の中に収束することを条件にするのは全くおかしいことであるし,「減少関数 $\varepsilon(m) > 0$ がとれるとき」としても 0 に近づく保証がない．

また，p.44 でも述べたように，**m が必ずしも ε に連動するとは限らない収束する数列が存在する．**

以上のように m を任意なものとして先に決めてしまっても，あらゆる試行をしても x_n と a の距離がいくらでも小さくなるという保証が全くできないのである．そして，n を限りなく大きくする $\iff$ m を限りなく大きくする．と思っていたことである．これは全くの勘違いで，これに気づくことが，$\varepsilon - m$ 論法を理解する最大のテーマではないだろうか．だから，私が考えた $\varepsilon - m$ 論法の定義式は，不完全で全く意味のないことであった (こういった無駄な？思考が非常に大事である)．

しかしそれでも勉強していくうちに，次のようなことを考えたら $\varepsilon - m$ 論法を理解できた．

> $\varepsilon - m$ 論法は，$n \to \infty$ のとき，x_n が a にどんどん近づくということを式で表したというよりも，$n \to \infty$ のとき，a に収束する数列の特徴を式で表したものと考えたらよい．

このギャップに早く気づくことが理解の第一歩である．そして

> **$\varepsilon - m$ 論法は，極限値を求めることに使うのではなく，極限値がわかっているときに使うものである**

ということである．

$\varepsilon - m$ 論法は収束する数列の保証をするもので，$n \to \infty$ の部分は，

$n > m$ を満たす全ての自然数

で置き換えられているが，「$n > m$ を満たす全ての自然数 n」の部分を，n を限りなく大きくするという意味としてとらえられるようになるには時間がかかると思う．そして，収束するというのは，一般項のみ x_n が極限値 a に近づくのでなく，

数列 $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots$ と極限値 a がいくらでも近づけることができる．

という意味であることはいままで述べたとおりである．ε から先に与えられしかもそれが『任意である』というところがポイントで，任意の ε が先に与えられれば，数列 $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots$ と極限値 a の距離がいくらでも小さくできるということをで保証できているのである．

収束するということの保証を式で表すとき，いかにシンプルに表現するのかということが一番の課題だったのではないかと私は考えている．イプシロンデルタ論法は先人の知恵の結晶ではないであろうか．

1.17　$\varepsilon - m$ 論法のまとめ

以上の議論からわかったように，

$\varepsilon - m$ 論法のまとめ

(1) 極限値を求めるものではない．**極限値がわかっていてはじめて使うものである．収束する数列の特徴を式で表したものである．**

(2) 求めた極限値が本当にその極限値に収束することを証明するもの，保証するものである．極限値と数列の関係はどうなのであるか．つまり，数列 $\{x_n\}$ において，どういうことがいえたとき，収束したといえるのか (極限値と数列 x_n の関係はどうなっているのかということである) を保証するもの．

(3)「n を限りなく大きくするとはどういうことか」とか「極限値に限りなく近づくということはどういうことか」とか「あらゆる近づき方」を説明できるもの

ということである．

もう一度 1 つ 1 つ説明していこう．まず (1) についてである．私は学生時代，$\varepsilon - m$ 論法 (イプシロンデルタ論法) でどうして極限値を求めることができて，どうして絶対値を使っていちいち証明しないといけないのかということを悩み続けた．

たとえば，次のような問題がある数学書にかいてあった．

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \text{ を証明せよ．} \tag{1-33}$$

高校の問題だったら，

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \text{ の極限値の値を求めよ．}$$

という出題形式になるだろう．それが $\varepsilon - m$ 論法 (イプシロンデルタ論法) を学習したとき，(1-33) のような形式で出題されると，$\varepsilon - m$ 論法で極限値を求めることができるのかと悩んだことがあった．$\varepsilon - m$ 論法で極限値の 1 はどうやって求められたのであろうかと深く悩んだのであった．これは私の全くの勘違いで，まさにこの数列の収束の証明問題は，数学書の読み方の浅さを痛感させられた証明問題であった．この問題 (1-33) の意味は，あるやり方で極限値 1 がでて (高校生の求め方で 1 がでて)，あらゆる大きいやり方をやっても，1 に収束することを示せという意味であるから，$\varepsilon - m$ 論法を用

いて証明せよ (1 以外には収束しないことを，$\varepsilon - m$ 論法を用いて証明せよ) ということである．証明は，参考文献 [2, p.58-59] を参考にするとよいだろう．ここでは証明をしない．

ちなみに，この収束値は，ロピタルの定理を学んでいない高校生であれば，次のように求めるであろう (高校の問題であればヒントなしではまず解けないであろう)．$x_n = \sqrt[n]{n}$ とおき，両辺対数をとって，

$$y_n = \log x_n = \frac{\log n}{n}$$

とおく．

まず，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} = 0$$

を示す．$n > 0$，$e^n > 0$，$n < 2^n$，$e = 2.718\cdots$ より，

$$0 < \frac{n}{e^n} < \frac{2^n}{e^n} = \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

が成り立ち，

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n = 0$$

よりはさみうちの定理から，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} = 0$$

となる．

ここで $t = e^n$ とおくと，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} = \lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{t} = 0$$

となり，t を n に変えれば，$y_n \to 0$ が証明でき，つまり $x_n \to 1$ となるのである．高校生であれば，このように収束値を求めることで問題は終わりになる．

また蛇足ではあるが，私の経験をもう 1 つ話そう．$\varepsilon - m$ 論法で「上に有界な単調増加の数列は収束する」定理を証明した後，

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ が収束することを証明せよ}$$

という問題を掲載している数学書は多い．高校のときに当たり前のように使っていた $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ の $n \to \infty$ としたときの極限値は e で表すということであったが，これは一種の定義のように使ってきた．しかし当時勉強のやり方が浅かった私にとって，どうして，いちいち $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ が e に収束することを証明するのだろうか，定義そのものではないかと思ったものである．しかし，じっくり数学書を読んでみると，これも全くの私の勘違いで，**高校の教科書にはこの数列がきちっと収束する証明はかいていない．** 直感的に収束するものとして e の存在を認めているのである．

だからこの問題は，高校では証明してこなかった

$$\text{数列}\quad x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{が収束することを証明せよ}$$

といっているだけで，何もその収束値まで求めよといっているのではないのである．証明は，参考文献 [2, p.54-57] を参考にするとよいだろう．ここでは証明をしない．有界な上に単調増加の数列の収束の例題として，必ず大学の数学の参考書に掲載される問題でもある．問題の意味を考えて読むようにしよう．

ちなみに，その極限値は

$$2.71828182\cdots$$

であり (高校では証明なし)，それを e とおくという流れである．つまり高校時代は，収束するという証明なしで，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.71828182\cdots (= e \text{ とおく})$$

を使ってきたということである．

『$x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ が収束することを証明せよ』という問題は，$x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ が収束することを証明するだけで，$\varepsilon - m$ 論法で

$$2.71828182\cdots$$

という数字を求めよといっているのではないのである．しかも，$\varepsilon - m$ 論法でその数字がわかるわけではないのである．つまり，この数字はあくまでも $\varepsilon - m$ 論法以外の方法で出された数字である．これに注意しておく必要がある．

いまとなっては本当に恥ずかしい話であるが，$\varepsilon - m$ 論法を学習した後で，$x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ の収束の証明が紹介され，その収束値は $2.71828182\cdots$ で紹介されると，どうして $\varepsilon - m$ 論法の章でこの収束値がいきなり出てきたのだろう．ひょっとしたら $\varepsilon - m$ 論法でこの数字がでたのか本当に疑問であった．あとでわかったことだが，これは私の全くの誤解であった．

大学でも極限値の求め方は，高校時代の求め方そのものを使う．$\varepsilon - m$ 論法を用いることによってそれが正しい極限値であることを証明する (保証する).

と考えたらよいであろう．もちろん高校時代計算で出した極限値は全く間違いない．$\varepsilon - m$ 論法はただそれを保証するだけで，大学の先生も高校時代の計算法で算出した極限値を全く疑わずにそのまま使うし，自分たちも正しいと思って使う．極端なことを言えば，$n \to \infty$ のとき，$\dfrac{1}{n} \to 0$ という公式を使って極限の問題を解いてきたといっても過言ではない．

次に (2) についてである．収束する数列の定義を $\varepsilon - m$ 論法を式で使って表すことによって，高校時代直感で求めていた極限値の保証や，p.89 のような高校時代に扱わなかった数列の収束を調べられることがわかったであろう．また，$\varepsilon - m$ 論法で，高校のときに証明なしで使ったはさみうちの定理や p.76 の「収束する数列の極限値の四則演算の公式」などの 1.14 節で述べた収束する数列の特徴を解説できるのであるし，証明できるのである．**高校の範囲では，どういう状態がいえたときに収束するということがいえなかった**のである．大学になってはじめて収束する数列を式で保証できたのである．

最後に (3) についてであるが,『限りなく大きくする』とか『限りなく近づく』とか『あらゆる近づき方』というような意味をきちっと解説できる．こ

れは，p.63 で述べたとおりである．高校時代は n を限りなく大きくするということは**具体的に**ほとんどといっていいほど考えてこなかった．この n を大きくするやり方も具体的に納得できる形で解説してくれるのである．

「このあらゆる近づけ方」というのは，2 変数以上の多変数関数の連続性を調べるときにより威力を感じることになるであろう．p.89 の問題のコメントでも述べたように，極限値を求めるときは，高校時代の直感に頼った求め方で大学で十分であるが，その直感もまた 2 変数関数以上の関数だと直感だけで自信を持てなくなる問題もある．これについてはここでは述べないが，参考文献 [1, p.110-119] で詳しく述べているのでそちらを参考にしていただきたい．

1.18　$\varepsilon - m$ 論法を解説して最後に・・・

本当にイプシロンデルタ論法は良くできているもので，こういう定義そのものは数学の天才しかできないのかなと思ってしまう．しかし先人の知恵の苦労が凝縮したかのように，とてもシンプルに収束が定義されている．イプシロンデルタ論法の意味をきちんと理解させる解説をしようと思ったら，このように数列の収束だけでも 100 ページ近くかかってしまうものである．

私は $\varepsilon - m$ 論法を，高校の問題を使って，というより高校の教科書や参考書に載っている内容を使って，なるべく高校の極限と大学の極限の学習内容の垣根を低くしようと試みた．いかがだっただろうか．本来ならもっとコーシー列や実数の連続性なども解説したかったが，これはまた機会があればということにしたい．今回はとりあえずはじめて学ぶ大学新入生のための $\varepsilon - m$ 論法を特に重視して，高校の内容にこだわった．なんだかんだいっても，$\varepsilon - m$ 論法を理解するには，高校の内容の極限値を求めるパターンは身につけておかないといけないし，高校時代に極限の問題をたくさん解いて，それなりの計算力をつけておかないといけないことはいうまでもない．$\varepsilon - m$ 論法も一度イメージできれば後は簡単である．関数の連続性 (p.319 を参照) も同じように定義できる．

第 II 部

位相空間論

第 2 章

位相空間論

2.1　位相空間論を学ぶ前に

この章は，数学科の大学生が一番悩み難しいとされる「集合と位相 (位相空間論)」という科目を高校生 (超初心者) の視点から，解説していくことにしたものである．

「集合と位相」という科目は非常に抽象的すぎて，数字などがほとんどでなくて，数学と思えないような科目にもみえる．しかも，定義の解説の連続で，しかもその具体例が突発的で抽象的なものが多く，なかなかイメージがわきにくい．だから数学が得意でたまらない学生以外は，非常に難しく感じる科目でもある．この難しさを感じるのも位相空間の定義や近傍などのこれは自分たちの生活や今まで解いてきた問題とほとんどが直結しなくて，はじめて学ぶというのも大きいと思う．いざ学ぼうとすると非常に難しい科目である．開き直ったいい方をすれば，この科目が最初にすんなり入る人は，100 年に 1 人といっていいほどのよほど数学ができる人であろうと考えてしまう．むしろこの科目を通して，ほとんどの人が嫌になるのではないであろうか．嫌にならないほうが珍しいと私ながら思う．

しかし,「集合と位相」という科目は，実は大学数学のすべての基礎だと思っている．これは全く否定できない．位相空間で学ぶ用語は大学数学の本であらゆるところに登場して，しかもこれらの用語はあらゆる定理の基礎となっている．だからこそ,「集合と位相 (位相空間論)」という科目は，心底理解しないといけないのである．一番マイナーな科目であるようで一番大事な科目である．難解であるからといって逃げてはいけないし，大学数学を理解する上で絶対に避けては通れない科目である．逆に，この科目がある程度イメージがわいて理解できていれば，大学の数学の内容も一気にひらけるもの

だと思っている.

だからこそ，私もこの科目に今まで思い悩んできたので,「集合と位相 (位相空間論)」を難しく感じている学生や挫折した人を対象に，イメージを一番に大事にしながら解説しようと私自身が考えたのである (はっきりいって私のうぬぼれである)．いきなり定義することを極力控え，どうしてこのような定義をするのかということを，私なりの経験とアイデアを交えながら解説をした．だから基本的な部分が多くなって，この本の 1 冊分が他の位相空間の本の 1 章分くらいの内容にしかならないが，この章を理解することによって，大学の数学の視界が開き，格段のイメージとセンスつき，大学の数学にも自信が持てるようになるのではないかと考えている.

2.1.1　位相空間論を勉強するにあたって

まず，大学の数学を勉強するにあたって，ぜひ心がけておきたいことがある．その 1 つは，大学の数学は少しでも特徴をもったら名前を定義するということである．これをしっかり頭に入れておく必要がある．原子レベルで考え，それを膨らませていき，大きな定理へと発展する．それだけ厳密に細かく組み立てて考えていくということである．原子レベルで考えるということは，それが大学数学の基本中の基本になっている．化学科の実験が数 μg の単位で実験結果をはかっていくのと同じである．その考えがそのまま当てはまる科目のもっとも顕著な科目が「集合と位相 (位相空間論)」なのである. **また,「集合と位相 (位相空間論)」は大学数学を学ぶ上での心構えが詰まった科目ともいえる.**

また大学数学の本全般にいえるのであるが，大学は文部科学省の検閲から解放されているので，著者の個性がでて，同じ解析の本でも，かいている内容が全く違っていて，定義の表現も違っていることが多い．もちろんいっていることは同じである．大事な外せない内容も，本によってはかいていないものもある.「集合と位相 (位相空間論)」の教科書も然りで，同じ連続の定義でも，違う表現で定義されることが非常に多い．表現は多種多様である．だからはじめて学ぶ人にとって戸惑うことが多いのである.「集合と位相 (位相空間論)」の本には残念ながらわかりやすい本も私の知る限り少なく (2000

年代に入ってからわかりやすい本も増えたがまだまだ少ない)，表現が多種多様であるからもっと分からなくなる．これも「集合と位相 (位相空間論)」の理解を難しくしていることの理由の 1 つだと思う．

先ほどの節 2.1 の部分で，イメージがわくようにわかりやすくかいたと述べた (というより，わかりやすくかいたつもりである)．しかしそれでもわからないことがある．この場合，同じような内容の本を本屋や図書館で探すことを忘れてはいけない．これは仕方ないことだが，もし同じ言葉，たとえば連続の定義で違う表現で定義されていたら，自分で何日かけてもイメージでき，具体例がつくることができるまで，結局は同値だったと理解するまで自分で手を動かして理解しないといけないということは肝に銘じておく必要がある．つまり，理解するまでは，努力と忍耐と日数が必要であることを忘れてはいけない．

それとこれは私の経験からであるが，

> 収束する数列と 1 変数関数の連続性のイプシロンデルタ論と実数の連続性の 3 つをどこから聞かれてもきちんと理解して書籍を見ないで説明できるようになると (内容を忘れていても本をながめるだけで再構築できるようになると)，いつの間にか「集合と位相 (位相空間論)」という科目を理解する下地はきっちりできている (イメージする実力はついている)．

ということは間違いなくいえる．この本では，まず最初に収束する数列のイプシロンデルタ論法についてのみ解説したが，これを理解するだけでも，「集合と位相 (位相空間論)」の内容理解の助けになることは間違いなくいえる (後の p.305 の連続写像の節で連続性のイプシロンデルタ論をそれなりに詳しく説明している)．

だから実は，イプシロンデルタ論をしっかり理解することが，「集合と位相 (位相空間論)」という科目を理解することの最善方法かもしれないのである．イプシロンデルタ論を心底理解する過程においてあらゆる書物を調べることになる．その過程である程度の言葉が出てきて，理解していっている．

極端なことをいえば，1 変数関数の連続性や収束する数列のイプシロンデルタ論を拡張したもの，または特徴的なものをあらためて「集合と位相 (位相空間論)」という科目で学ぶだけといっても過言ではないと思う.

2.1.2　この本の位相空間論の進め方

前置きが長くなった．それでは内容に入っていくことにしよう．いままでは,「集合と位相 (位相空間論)」というという言葉を使ってきたが，いまからは位相空間の解説になるので，位相空間に言葉を変えて説明していくことにする．**今の段階で一番大事なことは，位相空間にでてくる言葉 (数学の定義) をしっかりイメージできて理解できるかということである (言葉を暗記することと違う)**．だから，位相空間論を学習するに当たって，次のような順番でやるのが一番良いのではないかと考えている.

(1) まず位相空間論で使う言葉を解説する．イメージを養うために，まずは数直線 R や平面 R^2 で，ユークリッドの距離を使って (高校まで学んだユークリッド幾何の距離を使って)，位相空間論の基礎となる言葉をたくさん理解しておく．R や R^2 では目に見えて理解できるので，ここでしっかり言葉を理解しておけば，R^3 や R^n になっても，強いては一般の位相空間になっても同じようにイメージできる.

(2) 集合に距離を定義して，距離を入れた位相空間を考える.

(3) 一般の位相空間を定義する.

これは何をいっているのかさっぱりわからないであろうが 1 つずつ解説していくので安心してほしい.

まずはとにかく位相空間論で使う言葉である．とにかく言葉を，イメージできるように解説していくことにしよう.

2.2　数直線 R における言葉の定義

まずは，先ほども述べたように，言葉をたくさんイメージをもって理解する必要がある．イメージをもって理解させるとはいえ，この中でも乗り越え

ないといけない難しい証明もいくつかあるのでそのあたりは覚悟しておかないといけない．とりあえずは，位相空間論でいろいろ定義される言葉を，数直線 R，または平面 R^2 上で解説する．位相空間論で定義される言葉は，非常に抽象的なものが多い．だからこそ，目に見えて考えることのできる数直線 R や平面 R^2 でイメージをもたせながら理解する必要がある．だいたいは，数直線と平面でイメージされたものは，他の位相空間論でも応用が利くと考えてもいい．

いよいよ言葉の説明に入ることにしよう．まずは近傍や開集合を定義しよう．

2.2.1　定義：ε 近傍

実数 $p \in R$，及び $\varepsilon > 0$ が与えられたとき，

$$B_\varepsilon(p) = \{x | x \in R, |p - x| < \varepsilon\} \tag{2-1}$$

を p の **ε 近傍**という．

つまり，**距離を使って定義した近傍で**，p の近傍とは，p **を中心として考えた** p との距離が ε 未満の R の点の集合 (**仲間**) となる．近傍のイメージとしてはこの考え方が非常に大事である．

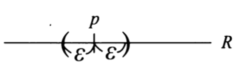


図 2-1　ε 近傍

2.2.2　定義：開集合

R の部分集合 U が，R の開集合であるといわれるのは，$\forall p \in U$(**任意の点 p というところがポイントである**) に対して，

$$B_\varepsilon(p) \subseteq U$$

となる $\varepsilon > 0$ が存在するときである．つまり，開集合とは集合に含まれるどの点をとっても ε 近傍が含まれる (ε 近傍をとることができる) 性質をもった集合のことである．

開集合の例

開区間 (a, b) は R の開集合である．

【証明】

$\forall p \in (a, b)$ に対して，

$$\varepsilon = \min\{p - a, b - p\}$$

とおけば，$\varepsilon > 0$ で，

$$B_\varepsilon(p) \subseteq (a, b)$$

である．

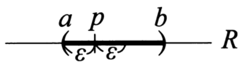


図 2-2　R において開区間は開集合

開集合の例

ε 近傍 $B_\varepsilon(p)$ は，R において開集合である．

これは，開区間が開集合である証明と同様にできる．近傍でかつ開集合のものを特に**開近傍**という．

開集合の例

数直線 R は，R において開集合である．

R の任意の点 p において，たとえば ε 近傍 $B_1(p)$ がとれるので，数直線 R は，R において開集合である (ここで $\varepsilon = 1$ としたが，別に 2，3 でも，有限値であればいくらでもよい)．

開集合の例

開区間の和集合，たとえば $(-1, 1) \cup (5, 8) \cup (100, 10000)$ は R において開集合である．

コメント

> **最初に，この位相空間論を勉強したときに，「開区間＝開集合」と勘違いをする人が多いと思うがそれは間違っている．開区間は開集合の 1 つであって，開集合そのものではない．またイメージ的に，集合の境界部分がないものが開集合と思ってもかまわないが，この考えに固執してしまうと，閉集合の具体例に戸惑ってしまうことがある．なぜなら端っこのない (境界部分のない) 数直線 R も閉集合であるからである．**「境界」というものも数学できちんと定義されているので後で紹介する．

2.2.3　ε 近傍と開集合の違い

まず最初に位相空間論を勉強したときは，ε 近傍は開集合であり，しかも ε 近傍は開区間でもあるから，混乱するはずである．開集合と ε 近傍の違いであるが，これはとらえ方の違いと思うとよい．**ε 近傍は点 (自分) を中心とする集合 (仲間) としてみて，開集合はどの点でも ε 近傍がとれる全体集合としてみればよい．**

たとえば，2.2.2 により開区間 $(3, 8)$ は数直線 R の開集合であるが，この開区間はどの点を中心とした点の集まりかはっきりしないから近傍といういい方は難しい．開集合なのであるから，開区間 $(3, 8)$ 内の任意の点で，ε 近傍がとれる特徴をもった区間であるとみることができれば，1 つの成長である．

ε 近傍はある点を中心とした集合 (仲間) という考え方が大事である．数学書を読むときに，どの視点でみるかで，ε 近傍とみるか開集合とみるかを考えながら読むと良い．ようはとらえ方の違いである．だから，たとえばある点を中心としたときに連続性を議論するときは近傍を使えばよいし，それが必要でないときは開集合を使えばよいということである．連続性については後で述べる．

また，ε 近傍は開区間であり，開集合であるから，後からでてくる近傍といえばすぐに開集合と思ってしまうがそれは間違いである．近傍は別に閉集合 (閉区間) の場合もある (閉集合については後で述べる)．つまり,「ε 近傍」と「近傍」は定義が違うということを頭の片隅に入れておく必要がある．

開集合があれば，閉集合もあると考えるのは普通の人 (?) は思うだろう．次は閉集合の定義である．

まず閉集合の定義であるが，閉集合の定義のほとんどが，開集合の補集合として定義されるがこれがかえって閉集合の定義を分かりにくくさせている．閉集合を開集合の補集合として定義するとなかなかイメージがわかないので，次のような導入を経て閉集合を定義をすれば，なんとなくイメージがわくであろう．

2.2.4　閉集合の導入

たとえば，開区間 $(1, 5)$ を考えよう．この開区間に含まれる数列 $\left\{5 - \dfrac{1}{n}\right\}$ の極限値は 5 であるが，この極限値はこの開区間には含まれない．しかし，数列 $\left\{5 - \dfrac{1}{n}\right\}$ は，閉区間 $[1, 5]$ にも含まれ，極限値も閉区間に含まれる．これが大きな違いである．これが，開区間 (開集合) と閉区間 (閉集合) の違いである．

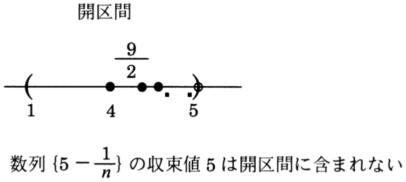


図 2-3　開区間は収束値が含まれない場合がある

よって，閉集合を次のように定義しよう．

2.2.5　定義 1：閉集合 (収束数列の極限値を使っての定義)

A を R の部分集合とする．$\alpha \in R$ に収束する A の数列 $\forall\{x_n\} \in A$ があるならば常に $\alpha \in A$ となるとき，すなわち，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \quad (\{x_n\} \in A) \to \alpha \in A \tag{2-2}$$

が成り立つとき，A を R の**閉集合**という．

つまり極限値が集合の中にあり**閉じている**ということである．閉集合の導入部分で具体的に述べたように，A が閉集合ならば，A の中の数列が収束する場合，その極限値が A の中に収まるということである．このイメージで閉集合を考えるとよいと思う．

2.2.6　定義 2：閉集合 (開集合の補集合としての定義)

A が数直線 R の閉集合とは，補集合 $A^c = R - A$ が R の開集合になることである．

閉集合を数列の極限値が属する集合であると定義してものを解説した．これはこちらの定義の方が「閉」という意味をもたせやすいからである．しかし，ほとんどの数学の位相空間論の数学書では，閉集合の補集合を使ってとして閉集合を定義している．これだとはじめて学んだ人にとっては，閉集合というものがイメージわきにくい (開集合は何となくイメージわきやすいと思う)．しかし，こちらの定義 2 の方が実は「閉集合である」ことを証明するのに扱いやすい定義なのである．なぜなら A に含まれるすべての数列の極限値が A に属するということを具体的に数列を使って証明するのは無理だとわかるはずである．だから**閉集合の定義 1 で閉集合のイメージをもち，定義 2 を使って閉集合であることの証明をする．閉集合にはこの心構えが必要である．**

それでは，閉集合の定義を 2 種類紹介したが，これら 2 つの定義が同値でないといけない．これら 2 つの定義が同値であることを証明しよう．

2.2.7　閉集合の定義 1 と定義 2 は同値である

この証明は，イプシロンデルタ論法をふんだんに使うし，証明が難しいので最初はとばして読んでもかまわない．ただ，**お互いが閉集合の定義の言い換えであることをきちんと理解しておく必要がある**

(証明)　　A を R の部分集合とする．まずは，(定義 1) → (定義 2)，つまり，

$$A \text{ に属する数列の極限値が } A \text{ の中にある} \quad \rightarrow \quad R - A \text{ は開集合}$$

を証明する．

ここの証明では数列のイプシロンデルタもどきのものを使うので，ちょっと証明が難しく感じるかもしれない．A を定義 1 の意味での閉集合とする．つまり，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \quad (\{x_n\} \in A) \rightarrow \alpha \in A \tag{2-3}$$

がいえるとする．証明は背理法を使って証明しよう．つまり定義 1 が成り立つにもかかわらず，$R - A$ は開集合でないと仮定する．まずはそのための準備を順を追って丁寧に解説しよう．

$R - A$ が開集合のときは，$\forall p \in R - A$ に対して，$\exists \varepsilon > 0$ が存在して

$$B_\varepsilon(p) \subset R - A$$

となる近傍がとれる．言い換えれば，$\forall p \in R - A$ に対して

$$B_\varepsilon(p) \cap A = \varnothing$$

となる $\varepsilon > 0$ が存在する．

背理法を使って証明するので，これを否定しないといけない ($R - A$ は開集合でないと仮定するということ)．この否定は，次のようになる．

$\forall \varepsilon > 0$(「どんなに ε を小さくとったとしても」と読み替えて考えてもよい) に対して，

$$B_\varepsilon(p) \cap A \neq \varnothing$$

となる $p \in R - A$ がとれる (「任意の $\forall$」と「ある $\exists$」が否定することによって逆になっていることに注意).

ε は任意であるから，どんな実数をとってもよく，ここでうまく $\varepsilon = \dfrac{1}{m}$ とする．仮定から

$$B_{\frac{1}{m}}(p) \cap A \neq \varnothing$$

となる p が存在する．

ここで，$\varepsilon = 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots$ に対して，$B_{\frac{1}{m}}(p) \cap A \neq \varnothing$ が仮定されているのであるから，$x_1 \in B_{\frac{1}{1}}(p) \cap A$，$x_2 \in B_{\frac{1}{2}}(p) \cap A$，$x_3 \in B_{\frac{1}{3}}(p) \cap A$，$\cdots$，$x_m \in B_{\frac{1}{m}}(p) \cap A$ と，実数 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ をとっていく．こうしてできた数列 $\{x_n\}$ は，

$$|x_n - p| < \frac{1}{n} \quad \text{かつ} \quad \{x_n\} \in A$$

となる数列がとれる．

つまり，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，$B_\varepsilon(p) \cap A \neq \varnothing$ であると，収束する数列がとれるということである．よって，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，$|x_n - p| < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$，つまり，$\forall n > \dfrac{1}{\varepsilon}(= M$ とおく) に対しては，$|x_n - p| < \varepsilon$ になるので，この数列 $\{x_n\}$ は，$\lim_{n\to\infty} x_n = p$，つまり p に収束する数列で，しかも $\{x_n\} \in A$ であるから，定義 1 の仮定から，

$$p \in A$$

でないといけないにもかかわらず，仮定の

$$p \in R - A$$

に反する．よって，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，

$$B_\varepsilon(p) \cap A \neq \varnothing$$

となる $p \in R - A$ はとれなく，$\forall p \in R - A$ に対して，$\exists\varepsilon > 0$ が存在して

$$B_\varepsilon(p) \cap A = \varnothing \quad \text{つまり}, B_\varepsilon(p) \subseteq R - A$$

となる近傍がとれる．つまり，$R - A$ は開集合であるので A は閉集合であることが証明できた (定義 2 の意味での閉集合が証明できた).

ここの証明での仮定は,「定義 1 の意味での仮定」と「$R-A$ が開集合でない」という 2 つの仮定を使っているので,よく考えて読むようにしよう.

【解説・注意】

証明の中の,$|x_n - p| < \dfrac{1}{n}$ となる,数列 $\{x_n\}$ が存在するという部分は,$n \to \infty$ のとき,x_n は p に近づくという意味ではなく,$\forall n$ に対して,x_n と p の距離が $\dfrac{1}{n}$ にできる数列 x_n が存在するという意味である.イメージとしては,p.36 の例 1.11.1 の $\left|\dfrac{-1}{n+1}\right| = \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ の部分をイメージするとよい.

次に,

$R-A$ は開集合 $\to A$ に属する数列の極限値が A の中にある

を証明する.

この証明もまた,背理法で証明する.つまり,$R-A$ が開集合であるにもかかわらず,A に属する数列の極限値 が A の中にないとする.つまり,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \quad \{x_n\} \in A \text{ であるが,} \alpha \notin A$$

と仮定しよう.$\alpha \in R-A$ であり,しかも $R-A$ は開集合であるから,

$$B_{\varepsilon_1}(\alpha) \subset R-A$$

となる $\exists\varepsilon_1 > 0$ が存在する.この式を言い換えたら

$$B_{\varepsilon_1}(\alpha) \cap A = \varnothing$$

となる $\exists\varepsilon_1 > 0$ が存在するということである.

しかし,$\{x_n\} \in A$ が α に収束するので,これをイプシロンデルタを用いて表すと,

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ に対して,} \exists N \text{ が存在して,} \forall n > N \to |x_n - \alpha| < \varepsilon$$

がいえる.$|x_n - \alpha| < \varepsilon$ の部分は,別の記号でかくと $x_n \in B_\varepsilon(\alpha)$ ということである.

$\forall\varepsilon > 0$ に対して，$\forall n > N$ に対応する数列は $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots \in B_\varepsilon(\alpha)$ がいえるということは，もちろん先ほどの ε_1 に対しても，ある M_1 をうまくとれば，$n > M_1$ を満たす $\forall n$ に対して，

$$x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots \in B_{\varepsilon_1}(\alpha)$$

ということである．したがって仮定より，$x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots \in A$ でもあるから，上記の

$$B_{\varepsilon_1}(\alpha) \cap A = \varnothing$$

に矛盾する．したがって，

$$\alpha \in A$$

でないといけない．よって，A は定義 1 での意味でも閉集合であることが証明された．

以上の証明から定義 1 と定義 2 の閉集合の定義が同値であることが証明された．これで，閉集合の定義はお互いが言い換えで，閉集合であることを証明するには，どっちを使ってもよく，どちらを使った方が証明しやすいかを判断できるようにする必要がある．

コメント

1 章でも述べたが，大学数学の証明のやり方はこれといったパターンというものもなく，背理法を使うことが経験上多いと感じる．

2.2.8　閉区間と閉集合の注意点

閉集合が出てきたとき，まず具体例にあがるのが閉区間であるが，これがまた閉集合というものを勘違いさせる．先ほどの開集合でも述べたが，最初は必ずといってもいいほど「閉集合 = 閉区間」と勘違いする．開区間同様に，閉区間は閉集合の一部であって，もちろんイコールではないことに注意．

閉区間 $[a, b]$ にあって，開区間 (a, b) にない特徴とは，閉集合の導入で述べたように，端を含んでいるかどうかで，収束する数列の極限値がその閉区間に含まれた．この取り上げた閉区間の具体例によって，また閉集合という名

前上，閉集合とは．境界 (端) があるもの (もちろん境界というものも数学できちんと定義しないといけない．ここでは，境界を集合の端としておこう) と最初は思うであろう．実際，少し数学ができる人であれば，R における閉区間や R^2 における円の内部 $D^2 = \{(x,y)|x^2 + y^2 \leqq r^2\}$ が閉集合で，しかもその判断が端があるかないかだと思うはずである．これは仕方ないことであるが，この予想も間違いではないが，完全ではない．

閉集合の定義をよく読んでみよう．いままで紹介した**閉集合の定義には境界に関する定義は全く述べられていないし，端がふくまれるかどうかで定義されているのでもない．**どうしても，閉集合は閉区間，開集合は開区間と先にイメージをしてしまって，端のあるものとないものの差が大きな差になっていると勘違いしてしまうのも無理はない．実際，数直線 R は端をもたない閉集合である．数直線 R が閉集合であると最初は「えっ？」っと思ってしまう．なぜなら，端がないし，数直線 R は開集合だったからである．しかし，閉集合の定義に沿って考えれば，**数直線 R が閉集合といわれても納得いく．なぜなら，イメージとしてはどんな収束する数列をとってきても，その数列の極限値は R に属するからである．だから，数直線 R は，開集合であり閉集合でもあるということである．**それに 2 次元 R^2 に広げると，端をもたない閉集合はたくさん考えることができる．たとえば，円 $S^1 = \{(x, y)|x^2 + y^2 = 1\}$ や双曲線 $\{(x, y)|x^2 - y^2 = 1\}$ などが R^2 での閉集合である (この証明は後にしよう).

とにかく，いまのところ閉集合を学ぶ上で気をつけることは，端があるかどうかは閉集合の判定には関係ない，それと，閉区間は閉集合の 1 つであるということ，これをしっかり頭に入れて閉集合を考えていこう．それでは閉集合の具体例をみていこう.

閉集合の具体例

数直線 R において，閉区間 $[a,b]$ は閉集合

【証明】

直接数列の極限値を使って求めるのが難しいので (難しいというより，証明は 2.2.7 の証明の内容を $A = [a, b]$ とおいて証明すればよい)，閉集合の定

義 2.2.6 を用いよう．$[a,b]$ の補集合 $R-[a,b]=(-\infty,a)\cup(b,\infty)$ である．$\forall x\in(-\infty,a)\cup(b,\infty)$，たとえば $\forall x\in(-\infty,a)$ に対して，$\varepsilon=a-x$ とおくと，$B_\varepsilon(x)\subset(-\infty,a)$ がいえて，(b,∞) のほうでも，同様に任意の点で ε 近傍が含まれるので，$R-[a,b]=(-\infty,a)\cup(b,\infty)$ は開集合である．よって，$[a,b]$ は R において閉集合である．

閉集合の具体例

数直線 R において，数直線 R は閉集合

【証明】

収束する $\forall\{x_n\}\in R$ の極限値は必ず R の元であるから，R は閉集合である．

閉集合の具体例

数直線 R において，半閉区間 $[a,\infty)$ は閉集合

【証明】

半閉区間 $[a,\infty)$ の補集合 $R-[a,\infty)=(-\infty,a)$ で，先ほどの閉区間が閉集合であることと同じように証明できる．$(-\infty,a)$ の任意の点で ε 近傍がとれるということである．

とにかく，$[a,\infty)$ に含まれる任意の収束数列の極限値が必ず $[a,\infty)$ に含まれているということをイメージをもってほしい．

閉集合の具体例

数直線 R において，自然数の集合 $N=\{n|n\in N\}$ は閉集合

【証明】

図 2-4 をみてもわかるように，開区間 $(-\infty,0)$，無数の $(n,n+1)$，$(n+1,\infty)$ ができる．開区間は，p.122 の例 2.2.2 で開集合と証明されている (補集合の任意の点で ε 近傍がとれるので開集合である)．補集合 $R-N$ が開集合であるから自然数の集合 N は，R において閉集合である．

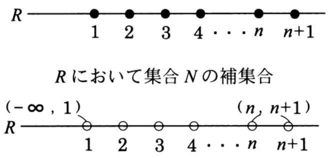


図 **2-4** R において自然数の集合と補集合

同様にして，数直線 R において，整数の集合 $Z = \{z | z \in Z\}$ も R の閉集合であるとわかるであろう．この時点で，閉集合は区間だけではないと理解できるはずである．開集合ももちろんであるが，閉集合も点の集まりという集合である．

閉集合の具体例

数直線 R において，実数の有限集合 $U = \{\sqrt{2}\} \cup \left\{\frac{7}{3}\right\} \cup \{5.3\}$ は閉集合

【証明】

先ほどの自然数の集合が閉集合である証明と同様に，補集合 $R - U$ をとれば，4 つの開区間ができ，それらの任意の点で ε 近傍がとれるので $R - U$ は開集合である．よって，U は閉集合である．

有限個からなる実数 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ からなる R の部分集合 $A = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$ は R において閉集合である．

閉集合でない例

R においては，自然数や整数の集合，または先ほどの例 2.2.8 であるものも閉集合であったが，似たような次の集合

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \frac{1}{n} \cdots\right\}$$

は R において閉集合でない．なぜなら，A の元の極限値 0 は，A に含まれないからである．この集合 A は R において，開集合でも閉集合でもない．

このようにみてきたように，R における閉集合は，別に $[1,5]$ などのように連続につながった集合だけでなく (閉区間だけでなく)，$\{1\} \cup \{4\} \cup \{7\}$ などのように点の**集合**でも，条件を満たしているので，R において閉集合になるのである．この例のように，R 上の点の集合が無限，有限で閉集合かどうかを決まっているわけではないということもわかる．

もちろん，R で開集合でも閉集合でもないものがある．たとえば，半開区間 $(a, b]$ や $[a, b)$ などがそうである．

コメント

私は閉集合は閉区間のみと勘違いしてきた．閉集合の具体例がまず閉区間から語られるとその先入観はさらに増す．R が閉集合といわれても全くイメージできなかった．よく考えてみると，閉「集合」とかいているので何か特徴をもった点の集合と考えるべきである．だからつながった区間とは限らない．そういうふうに納得して，いろいろな閉集合を自分で考えていった．しょうもないことでもいいから疑問にもち，数学の定義に納得して，自分で具体例を作っていく．これが大学の数学の勉強のやり方の 1 つだと思っている．またこれは私見であるが，いままでの例をみてもわかるように，開集合より閉集合の方が種類が多く感じるのは私だけであろうか．言い換えれば，開集合の方がよりシンプルだともいえるのではないだろうか．

次に，これから位相空間の話題でたびたび出てくる空集合について，いくつか大事な性質などを解説しておこう．

2.2.9　空集合 $\varnothing$ について

どんな集合も部分集合として，空集合 $\varnothing$ を含む．これは次のように考えるとよい．たとえば 2 人の集合 $\{a, b\}$ があったときに,「〜が好きな人」と手を挙げさせていって，a 君のみ $\{a\}$，b 君のみ $\{b\}$，両方とも手を挙げる $\{a, b\}$ は簡単に考えられるが，両方とも手を挙げない (空集合 $\varnothing$) 場合もあるからである．つまり，部分集合に必ず空集合 $\varnothing$ を考えないといけないのである．

よって，$\{a, b\}$ の部分集合は $\{a\}$，$\{b\}$，$\{a, b\}$，$\varnothing$ となる．

次に，定義 2.2.6 より，$A \subset R$ が R の閉集合であるには，$R - A$ が開集合であるということがわかった．閉集合の例 2.2.8 で，R において R は閉集合ということが証明されているが，R の補集合 $R - R$ をとったとき答えは $\varnothing$ である．となると 空集合 $\varnothing$ は開集合と定義しておかないといけない．同様にして，$A \subset R$ が R の開集合であるには，$R - A$ が閉集合であることと同値であるので，数直線 R は R において開集合だったので (例 2.2.2)，その補集合 $R - R = \varnothing$ は閉集合と定義しておかないといけない．

つまり，**空集合 $\varnothing$(元が存在しない集合) という集合は R において開集合であり，閉集合である**ということである．

これまでは，ある特徴を持った「集合」について解説してきた．次は，ある特徴を持った「点」について解説していきたい．まずは集積点について解説する．

2.2.10 定義：集積点

R の部分集合 A の**集積点**とは，読んで字のごとくその点のまわりに A の点が無数に集積しているような点のことである．$a \in R$ に対して，a が A の集積点とは，a のいかなる小さい ε 近傍をとっても (ε **が任意であるということ**)

$$\{B_\varepsilon(a) - \{a\}\} \cap A \neq \varnothing \tag{2-4}$$

が成り立つときである．この a を A の**集積点**という．A のすべての集積点の集合を**導集合**といい，A^d で表す．

具体例でみてみよう．

集積点の例 1

R での部分集合，開区間 $(5, 7)$ と閉区間 $[5, 7]$ を考えよう．この 2 つの区間について大きく違うのは，端の点を含むかどうかである．ここでたとえば内部の点について考えよう. たとえば，内部に含まれる 6 をとって考えよう．集積点の定義に当てはめて考えると，それぞれ，任意の $\forall\varepsilon > 0$ に対して，

$$\{B_\varepsilon(6) - \{6\}\} \cap (5, 7) \neq \varnothing$$

$$\{B_{\varepsilon}(6) - \{6\}\} \cap [5,\,7] \neq \varnothing$$

が成り立つから，ともに 6 は開区間 (5, 7) と閉区間 [5, 7] の集積点になっている．同様にして，内部の点はすべてそれぞれ集積点になることも直感的にわかるであろう．問題は端の点，5 と 7 である．集積点の定義をよく読んでみると，**考える点はなにも考えている集合に含まれていなくてもよい**．つまり，$5 \in R$ であればよいので，これについても集積点になっているかどうか，開区間でも考えることができる．

ここで，閉区間 [5, 7] について，任意の $\forall\varepsilon > 0$ に対して，

$$\{B_{\varepsilon}(5) - \{5\}\} \cap [5,\,7] \neq \varnothing$$

が成り立つので，5 と 7 は閉区間 [5, 7] の集積点になっていることはわかる．

開区間 (5, 7) に関しても，任意の $\forall\varepsilon > 0$ に対して (どんなに ε を小さくとっても)，

$$\{B_{\varepsilon}(5) - \{5\}\} \cap (5,\,7) \neq \varnothing$$

が成り立つので，5 と 7 も開区間 (5, 7) の集積点になっているのである．自分で図にかいて確かめてみよう．

よって，この開区間 (5, 7) と閉区間 [5, 7] の集積点の集合，つまり導集合は，まとめてかくとともに，

$$[5,\,7]^d = (5,\,7)^d = [5,\,7]$$

であることがわかる．

また，一般に開区間 (a, b) の導集合 $(a, b)^d$ は閉区間 $[a,\,b]$ であるということもわかる．こうしてみると，一般に $A \subseteq A^d$ が成り立つように思えるがそうではない．たとえば R の部分集合 A を

$$A = \{3\} \cup (5,\,7)$$

とおけば，$A^d = [5,\,7]$ であり，A と A^d の大小関係は語ることはできない (次節の孤立点を参照．この部分集合の 3 は孤立点という)．

次に，先ほどの導入でも述べた収束する数列の極限値と集積点の関係をみていこう．

集積点の例 2

α に収束する数列 $\{x_n\}$ を考えよう．これをイプシロンデルタを使って表すと，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，$\exists N > 0$ をとると，

$$\forall n > N \text{ に対して}, |x_n - \alpha| < \varepsilon$$

がいえる．わかりやすくいえば，どんなに ε を小さくとっても，α の周りには無限個の数列の元があった (詳しくは第 1 章のイプシロンデルタ論法に述べてある)

だから，数列 $\{x_n\}$ を数直線上に並べた R の

$$\text{部分集合 } A = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$$

として考え，これを集積点の定義にあてはめると，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，

$$(B_\varepsilon(\alpha) - \{\alpha\}) \cap A(= \{x_n\}) \neq \varnothing$$

が成り立つので，α はこの収束する数列の集積点になっている．

p.124 の閉集合の導入 2.2.4 の数列の例でいえば，A にあたるものは数列 $\left\{5 - \dfrac{1}{n}\right\}$ で

$$A = \left\{4, \frac{9}{2}, \frac{14}{3}, \cdots\right\}$$

である．数列もこうしてみると，R の部分集合と考えることができ，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，

$$(B_\varepsilon(5) - \{5\}) \cap A \neq \varnothing$$

が成り立つので，この数列の極限値は集合 A の集積点でもある．つまり，

収束する数列の極限値の **1** つは，その数列の集積点である

ということがいえる．ここで，注意しておかないといけないことがある．それは，**極限値の 1 つ**はとかいたことである．

収束する数列を使っての集積点の定義の注意点 (収束する数列を用いた集積点の定義)

α に収束する数列 $\{x_n\}$ で，$\forall x_n$ に対して $x_n \neq \alpha$ が成り立つとき，α をこの数列の**集積点**という．この集積点の定義は，p.134 の集積点の定義 (2-4) を満たしていることは，先ほどの例でもわかることである．ここは何が言いたいかというと，たとえば収束する数列

$$A = \{x_n\} = \{1\}$$

も 1 に収束する数列であるが (証明は p.39)，これが集積点の定義 p.134 の (2-4) を満たしているかというと満たしていない．なぜなら，p.134 の集積点の定義式 (2-4) に当てはめると，R において，

$$\{B_\varepsilon(1) - \{1\}\} \cap A = \varnothing$$

となり，集積点の定義式を満たさない．だから，収束する数列はすべて集積点に収束するというのは間違いなのである．

集積値

収束する数列の極限値が集積点の場合と，ある項より先が極限値と一致するような収束する数列の極限値をまとめて **数列の集積点という意味で集積値**といったりもする場合がある．

2.2.11　定義 3：閉集合 (集積点を用いた定義)

数直線 R の部分集合を A とする．A **に集積点がある場合**，その集積点すべてが A に属するとき，A を R の**閉集合**という．

この定義には細心の注意をはらわないといけない．この集積点を使った閉集合の定義には，「A **に集積点がある場合**」とかいた．だから，集積点を持っていなくても (A の導集合 $A^d = \varnothing$ の場合でも)A は閉集合になり得るのである．

集積点がない場合の ($A^d = \varnothing$ の場合の) 閉集合

p.132 の閉集合の具体例で見てもわかるように，R において，たとえば有限個の点の集合

$$A = \{1\} \cup \{3\} \cup \{5\}$$

とおいたとき，A は R において閉集合であった．孤立点の定義式から，この 1, 3, 5 は A の孤立点で，集積点ではない (孤立点の定義は後で述べる)．つまり集積点はもっていないが，A は閉集合である．これはどういうことかというと，$A^d = \varnothing \subset A$ であるということで，一般に任意の集合は空集合を部分集合としてもつと考えるので，集積点を使った閉集合の定義にあてはまると考える．

これを収束する数列に絡めて具体例をあげると，たとえば

$$\{x_n\} = \{3\}$$

という無限数列を考えると，

$$\{x_n\} \in A$$

であり，この数列の極限値はもちろん 3 であるが，この 3 は集積点でないのは，先ほどの収束する数列を使っての集積点の定義を満たさないからである．つまり，$\forall x_n$ に対して $x_n \neq 3 (= \alpha)$ という部分である．

だから，もう一度述べるが，集積点があってそれらすべてが A に属するとき A は閉集合であり，集積点がない ($A^d = \varnothing$) 場合も A は閉集合になるのである．詳しくは，p.151 を参照にしよう．

この閉集合の定義をみたときに，p.125 の定義 2.2.5 に似ていることがわかるであろうが，もう一度整理して解説する．

開区間と閉区間の大きな違いは，端の点を含むかどうかであるが，この端の点は p.125 での閉集合の定義をみてきたように，収束する数列の極限値に絡めて議論することができる．開区間や閉区間の端の点は，孤立点ではなく集積点であるので，集積点をもつかどうかは，この端の点を収束する無限数列の極限値をもつかどうか (集積点があるのでそれが属するかどうか) で閉集合かどうかが決まるということである．

数学書によっては，この定義を閉集合の定義に採用するものもある．しかし，この定義であると，まずは非常に抽象的な集積点をまずは説明しないといけないので，難しいものがある．

ちなみに，p.132 の閉集合でない例 2.2.8 で，A の集積点は 0 で，A は集積点を含まないので A は閉集合でないということができる．

集積点が出てきたので，特徴を持った関連する点として触点を説明しておこう．冒頭の部分で，少しでも特徴をもったら名前が定義されると述べたが，その最たるものの 1 つだと思う．

2.2.12　定義：触点・閉包

数直線 R の部分集合を A とする．点 a は A に属していても属していなくてもよく (つまり，$a \in R$ ということ)，a の**任意の**近傍 $B_\varepsilon(a)$ に属する A の点 x が存在するとき，点 a を A の**触点**という．これを式でかくと，つまり，

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ に対して}, B_\varepsilon(a) \cap A \neq \varnothing \tag{2-5}$$

が成り立つとき，点 a は A の触点というのである．**つまり触点は ε 近傍が常に A に触れている点ということである．**

この触点の定義をみたとき，p.134 の 2.2.10 の集積点の定義に似ていると気づくはずである．しかしよく見てみると違うのは当たり前であるが，ようは集積点は近傍 $B_\varepsilon(a)$ に a 以外の A の点があることである．

もう一度集積点の定義式 (2-4) を確かめてみよう．この定義式をみてもわかるように，集積点は触点の一部分で，だから触点は集積点以外のものもある．それは**孤立点**である．孤立点の定義を式でかくと，

$$B_\varepsilon(a) \cap A \neq \varnothing \quad \text{かつ} \quad B_\varepsilon(a) \cap (A - \{a\}) = \varnothing \tag{2-6}$$

となる $B_\varepsilon(a)$ が存在することである (集積点と違うのは，ε は任意でないということである．言い換えれば 1 つでも条件を満たす $B_\varepsilon(a)$ がとれればよいということである)，この 2 つの式を満たす点 a を A の**孤立点**という．つま

りまとめてかくと，

$$B_\varepsilon(a) \cap A \neq \varnothing(\text{触点}) \begin{cases} \forall\varepsilon\text{に対して，} & \\ \quad (B_\varepsilon(a) - \{a\}) \cap A \neq \varnothing & (\text{集積点})\ (2\text{-}7\text{a}) \\ \exists\varepsilon\text{に対して，} & \\ \quad (B_\varepsilon(a) - \{a\}) \cap A = \varnothing & (\text{孤立点})\ (2\text{-}7\text{b}) \end{cases}$$

ここで，集積点と孤立点の定義式の ε の $\forall$，$\exists$ に注意しておこう．この孤立点の定義式 (2-7b) を

$$\exists\varepsilon\text{に対して，}B_\varepsilon(a) \cap A = \{a\}$$

とかいたりもできる．**また孤立点のことを，集積点でない A の点のことと解説してある数学書もある．**定義からもわかるように，**A の集積点は必ずしも A の点ではないが，A の孤立点は A の点である**ということである．

孤立点の具体例

R の整数の集合 $A = \{n | n \in Z\}$ の各元は R の孤立点である．

【証明】

R において，たとえば $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ としたとき，

$$B_{\frac{1}{2}}(n) \cap A = \{n\}$$

が成り立つから，各整数の点は孤立点である

また，A の触点全体の集合を**閉包 (もしくは触集合)** といい，$\overline{A}$ で表す．次の例 2.2.13 をみてもわかるように，

$$A \subseteq \overline{A}$$

が成り立つことはわかるであろう．また，触点を用いて，次のように閉集合を定義できる．

2.2.13　定義 4：閉集合 (触点を用いた定義)

一般に集合 A が R において

$$\overline{A} = A$$

が成り立つとき，A を R において閉集合という．つまり，R においては孤立点も集積点ももつ集合を閉集合というのである．そして，$\overline{A}$ は A を包む閉集合のうちで最も小さいものである．

本来，この閉包を使った閉集合の定義を，閉包の定理としている数学書もあるので，定義としてしまうと抵抗はあるのであるが，この本では定義としてあつかう (もちろん，この本に限らず，これを閉集合の定義としている数学書はたくさんある)．もし定理とした場合，$\overline{A}$ が，**数直線 R の閉集合であることを証明しないといけないが，ここでは証明を略す．**

触点の具体例

R の部分集合 $A = \{3\} \cup (5, 7)$ を考える．$A^d = [5, 7]$ である，また 3 については，$\exists\varepsilon > 0$ に対して，$B_\varepsilon(3) \cap A = \{3\}(\neq \varnothing)$ かつ，たとえば $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ とすれば，$(B_{\frac{1}{2}}(3) \cap A = \{3\}$ が成り立つので (図 2-5 参照)，3 は A の孤立点である．よって，$\overline{A} = \{3\} \cup [5, 7]$ である．また

$$A = \{3\} \cup (5, 7) \subset \overline{A} = \{3\} \cup [5, 7]$$

という包含関係があることは，この具体例を見ればイメージできるはずである．

また，R の部分集合 $B = \{3\} \cup [5, 7]$ を考えると，$\overline{B} = B$ が成り立つので，B は R において閉集合である

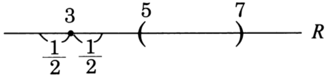


図 2-5　R において孤立点

2.3　定義：稠密 (ちゅうみつ)

X の部分集合 A が X で**稠密 (ちゅうみつ)** であるといわれるのは，

$$\overline{A} = X \tag{2-8}$$

が成り立つときである．稠密とは耳慣れない言葉が出てきたが，国語辞書で調べてみると，「1 つのところに多く集まっていること，こみあっていること」とかいてある．

2.3.1　稠密の具体例

先ほどの例 2.2.13 で考えよう．$A = \{3\} \cup (5, 7)$ は $X = \{3\} \cup [5, 7]$ の部分集合で，

$$\overline{A} = \{3\} \cup [5, 7] = X$$

が成り立つので，$A = \{3\} \cup (5, 7)$ は $\{3\} \cup [5, 7]$ で**稠密 (ちゅうみつ)** である

先ほどの具体例を紹介したところで，混み合っているというイメージがわかない．次の具体例を考えれば，こみあっているという稠密のイメージがわくであろう．

2.3.2　稠密の具体例

有理数の集合 Q は，実数で稠密である

【証明】

これを証明するには，任意の実数 $x \in R$ に対して，x は有理数の集合 Q の集積点であることを最初に証明する．つまり，

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して}, \{B_\varepsilon(x) - \{x\}\} \cap (Q) \neq \varnothing$$

を証明すればよい．この式の意味は，どんなに小さい ε をとっても，x 以外の有理数が $B_\varepsilon(x)$ の中に存在するという意味である．それでは，証明してみよう．

n を自然数，$\forall x \in R$ に対して，

$$m \leqq nx < m+1 \tag{2-9}$$

となる整数 m が存在する (ガウスの記号を用いると，$[nx]=m$ となる).

$$\frac{m}{n} < x < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$$

$$0 < x - \frac{m}{n} < \frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{n} < x - \frac{m}{n} < \frac{1}{n}$$

となり，$\forall \varepsilon > 0$ に対して，

$$\left| x - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

として，どんなに小さい $\varepsilon > 0$ をとっても，$\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ つまり，

$$\varepsilon n > 1$$

となる自然数 n をとれば，それに応じて式 (2-9) の m が定まり，

$$\left| x - \frac{m}{n} \right| < \varepsilon \tag{2-10}$$

が成り立ち，題意が証明された．つまり，どんなに小さい ε をとっても，x 以外の有理数が $B_\varepsilon(x)$ の中に存在するという意味である．もっとわかりやすくいうと，x の近くには 必ず 有理数が存在するということである．

これらの証明より，**任意の実数 $x \in R$ は，有理数全体の集合 Q の集積点であることがいえた**．つまり，

$$\overline{Q} = R$$

である．よって実数の集合 R の部分集合である有理数の集合 Q は，R で稠密である．

つまり，集積点ということは触点ということでもあるので，実数は常に有理数に触れているというより近くにあるということが数学的にも証明されたわけである．

コメント

こんな証明見せられたところで，初心者にとっては全く意味がわからないであろうし，突拍子もなくいきなり感を感じるであろう．最初のうちは，そんなものかみたいな気持ちと，混み合っているというイメージをもつことが大事で，数学で混み合っているというのを式で表したらどのようになるのかという考えをもつことが大事である．またとにかく，はじめて学ぶものにとっては，実数の集合 R に ε 近傍が導入されていれば，R のどんな部分集合にも，ε 近傍を使って，開集合や集積点など位相空間の言葉を考えることができるという心構えをもつことが大事である．

こんな直感的に当たり前のことまで証明を必要とするから，何を大前提に展開していいのか迷ってしまうであろう．とにかく具体的に確認すると，式 (2-10) において，$x = \sqrt{5}$ とする．たとえば $\varepsilon = 0.0001$ に対して，$n = 20000$ をとると，$\varepsilon n > 1$ を満たしている．よって，$nx = 20000\sqrt{5}$ に対して，式 (2-9) の $m = 47213$ が得られるということである．つまり，どんなに小さい ε をとっても，x の近くに有理数が存在するということである．

まだまだ，定義すべき用語があるので，解説しよう．

2.4　定義：境界点・内点・外点

閉区間 $[a, b]$ は R において，端の点を含んでいるので，境界を持っていると考えてしまうのも無理はないし，あながち間違ってもいない．a と b が境界部分になっていると簡単に想像できるであろう．しかし，端というイメージだけではすまされない境界もある．だからこそ，数学的に境界を定義する必要がある．また，実はこの境界は閉集合の定義に絡んでいて，境界を含む

ものが閉集合であると定義できる (これについては，後で詳しく述べる) のである．

その前に，内点と外点という点を解説し定義しよう．境界は，その内点と外点を使って定義するのである．内点といえば，何かの内部の点と想像がつくであろうが，定義は非常に抽象的であり，イメージは一筋縄にいかない．

2.4.1　定義：内点

数直線 R の部分集合を A として，R の 1 点 a について，

$$B_\varepsilon(a) \subset A$$

となる a の ε 近傍が存在するとき，a を A の**内点**という．わかりやすくいえば，a が A の内点であるとは，A において a の近傍 $B_\varepsilon(a)$ がとれるということである．また A の内点の全部の集合を**内部 (もしくは開核)** といい A^i で表す (ちなみにこの i は interior の i である)．もし A^i が R の開集合であるということをイメージできたら，それなりの実力とセンスが身についているということである (ちなみに，これにはきちんと証明が必要である)．

注意することは，A は R の部分集合であるから閉区間 $[a, b]$ であってもかまわない．閉区間 $[a, b]$ の内点の集合は開区間 (a, b) である．つまり，

$$[a, b]^i = (a, b)$$

ということである．また A^i が A に包まれる開集合のうちで最も大きいものであることはこの例からも直感的にわかるであろう．そしてまた，A が R の開集合になるには，$A^i = A$ が成り立つことが同値である (もちろんこれも証明が必要である) ことも直感的にわかるであろう．これら A^i の性質については，p.237 の節 2.12.3 で詳しく述べてある．

コメント

いっていることは同じなのであるが，別の本では，内部・内点の定義を次のようにかいてある．「A を数直線 R の部分集合とする．A に含まれる R のすべての開集合の和集合のことを R に関する A の内部といい，A^i

で表す．内部に含まれる点のことを A の内点という」また前出の閉包の定義も，「A を包むすべての閉集合の共通部分を R に関する A の閉包といい，閉包に属する点を触点である」と解説をしていたが，内部の定義や触点の定義が非常に抽象的であることがわかるであろう．触点は点で，点の特徴に注目して p.139 の式 (2-5) のように定義した方がはるかにわかりやすいわけである．

このように，大学の教科書は著者によってかく表現が全く違っており，理解しやすい本とそうでない本がある．同じ言葉の定義であっても，本 (著者) によって，いっていることは同じなのであるが表現は全く違うのである．このあたりのことを心構えとして，大学の本を読む必要がある．

内点の例

R において，R の部分集合を

$$A = [5,\ 6] \cup \{9\}$$

とすると，

$$A^i = (5,\ 6)$$

である．

2.4.2 定義：外点

内部の点があれば外部の点がある．数直線 R の部分集合を A として，R の 1 点 p について，

$$B_\varepsilon(p) \cap A = \varnothing \tag{2-11}$$

となる p の ε 近傍が存在するとき，p を A の**外点**という．言い換えれば，A の外点とは，A の補集合 A^c の内点であるということである．記号で表すと，$(A^c)^i$ である．A^c とは違うので注意する必要がある．

外点の例

$A = (a,\ b)$ であれば，$A^c = (-\infty,\ a] \cup [b,\ \infty)$ で，この A の外点の集合は $(A^c)^i = (-\infty,\ a) \cup (b,\ \infty)$ である．また，閉区間 $[a,\ b]$ の外点の集合も $(-\infty,\ a)$ と $(b,\ \infty)$ である．

2.4.3　定義：境界点

閉区間 $[a, b]$ の外点の集合は $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ であった．また閉区間 $[a, b]$ の内部は開区間 (a, b) であった．それなら，閉区間 $[a, b]$ の a と b は内点でも外点でもない．このような点を**境界点**という．式でかくと，次のようになる．数直線 R の部分集合を A として，R の 1 点 p について，任意の近傍 $B_\varepsilon(p)$ が

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ に対して}, B_\varepsilon(p) \cap A \neq \varnothing \quad \text{かつ} \quad B_\varepsilon(p) \cap (R - A) \neq \varnothing \qquad (2\text{-}12)$$

が成り立つとき，p は A の**境界点**といい，A の境界点全体の集合を A の**境界**という．A の境界を

$$\partial A$$

で表す．

この式 (2-12) の意味を具体的に考えよう．$A = [3, 5]$ とする．ポイントは **ε が任意ということで**，$B_\varepsilon(4)$ を考えると，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，$B_\varepsilon(4) \cap [3, 5] \neq \varnothing$ が成り立つが，$\varepsilon = 0.5$ のとき $B_{0.5}(4) \cap (R - [3, 5]) = \varnothing$ となり 4 は $[3, 5]$ の境界ではない．逆に，$A = [3, 5]$ の外点たとえば 7 をとると，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，$B_\varepsilon(7) \cap (R - [3, 5]) \neq \varnothing$ は成り立つが，$\varepsilon = 0.5$ のときは，$B_{0.5}(7) \cap [3, 5] = \varnothing$ となり，7 は $[3, 5]$ の境界ではない．つまり A の内点で任意の ε 近傍を考えると A と常に交わるが，外部と交わらないときがあるし，逆に A の外点で任意の ε 近傍を考えると $R - A$ と常に交わるが，内部と交わらないときがある．だから内部でも外部でも常に交わる ε 近傍の中心点を境界点といっているのである．

とにかく位相空間で考える (位相空間の定義については後で述べる．いまは集合とでも考えておこう) 境界点は，内点でも外点でもない点で定義されているということである．私たちは，どうしても境界というと図形の縁という考えをイメージしてしまう．だから，あとから紹介する例で，境界というものに図形の縁というイメージからかけ離れたものがたくさんでてくるので，その当たりは，注意して考えよう．

また，ε 近傍を使わずに，次のように境界を定義してある数学書もある．

$$\partial A = (R - A^i) \cap (R - (R - A)^i) \tag{2-13}$$

もちろん，式 (2-12) と式 (2-13) は同値であるので，どちらの式を使って考えてもかまわない (私としては式 (2-13) の方がイメージがわきやすいと思う)．この式の意味は，A **の内部を除いたものと，外部を除いたものの共通部分を境界という意味である**．このことをしっかり理解しよう．

境界の定義も数学書によっていろいろな表現の仕方があり，

$$\partial A = \overline{A} - A^i \tag{2-14}$$

ともかける．つまり，閉包から内点を除いたものである．また，全く同じなのであるが，境界を

「内点でない触点であるもの」

と解説してある数学書もある．結局，すべて同値であり，自分で確かめる必要がある．これらの式がイメージできればとりあえず充分である．

2.4.4　境界の具体例

R の部分集合，開区間 $A = (a, b)$ の境界を考える．境界の定義式 (2-13) を使うと，$A^i = (a, b)$，$R - A^i = (-\infty, a] \cup [b, \infty)$，
$(R - A)^i = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$，$R - (R - A)^i = [a, b]$ なので，

$$(R - A^i) \cap (R - (R - A)^i) = \{a\} \cup \{b\}$$

となり，開区間 $A = (a, b)$ の境界は a または b である．

ここで明らかになったことは，**開区間** $A = (a, b)$ **の境界はないというよりも，境界は** a **または** b **と 2 つあるわけだが，**$A = (a, b)$ **は境界をもっていない**といういい方になる．また，式 (2-14) の定義に従って議論をすると，
$\overline{A} = [a, b]$，$A^i = (a, b)$ より，$\overline{A} - A^i = \{a\} \cup \{b\}$ となる．

境界の具体例

R の部分集合，閉区間 $A=[a,b]$ の境界を考える．境界の定義式 (2-13) を使うと，$A^i=(a,b)$，$R-A^i=(-\infty,a]\cup[b,\infty)$，
$(R-A)^i=(-\infty,a)\cup(b,\infty)$，$R-(R-A)^i=[a,b]$ なので，

$$(R-A^i)\cap(R-(R-A)^i)=\{a\}\cup\{b\}$$

となり，閉区間 $A=[a,b]$ の境界は a または b である．**閉区間 $A=[a,b]$ の境界は a または b と 2 つで，開区間と違って境界をもっている**ということになる．

先ほども述べたが，閉区間 $[a,b]$ の a と b は閉区間 $[a,b]$ の境界である．また，a と b は境界であると同時に，閉区間 $[a,b]$ の集積点でもある．だから，数学書を読むときは，どういう状況で数学の話が展開されているのか，この点がどういう特徴で議論されているのだろうと考えながら読まないといけないのである．

境界の具体例

R の部分集合 $A=\{3\}\cup(5,7)$ を考える．境界の定義式 (2-13) にあてはめて考えてみよう．$A^i=(5,7)$，$R-A^i=(-\infty,5]\cup[7,\infty)$，
$(R-A)^i=(-\infty,3)\cup(3,5)\cup(7,\infty)$，$R-(R-A)^i=\{3\}\cup[5,7]$ より，

$$(R-A^i)\cap(R-(R-A)^i)=\{3\}\cup\{5\}\cup\{7\}$$

となる．この結果をみてもわかるように，R **において，孤立点は境界点である**ということでもあり，触点でもあった．

また式 (2-14) より，

$$\begin{aligned}\partial A&=\overline{A}-A^i\\&=\{3\}\cup[5,7]-(5,7)\\&=\{3\}\cup\{5\}\cup\{7\}\end{aligned}$$

と求めてもよい．

境界の具体例

境界という言葉を聞くと，図形の境界を普通は思い浮かべる．しかもその方が言葉のイメージがしやすいのはいうまでもない．しかし，定義をよくみるとある集合に対して境界が定義されているので，有理数にも境界を考えることができるのである．

たとえば，R において，有理数の集合 Q の境界 ∂Q を考えよう．p.148 の式 (2-14) を使って考えよう．p.142 の節 2.3.2 で，$\overline{Q} = R$ が証明されている．また，Q^i であるが，$q \in Q$ に対して，$B_\varepsilon(q) \subset Q$ となる，ε 近傍 $B_\varepsilon(q)$ がとれるかということであるが，$B_\varepsilon(q) = \{x \| x - q| < \varepsilon,\ x \in R\}$ の元には必ず有理数以外の実数が含まれるので (p.142 の節 2.3.2 で証明済み)，$B_\varepsilon(q) \not\subset Q$ である．よって，$Q^i = \varnothing$ で，$\partial Q = \overline{Q} - Q^i = R$ となり，有理数の集合の境界は実数の集合となる．

内点・外点・境界の注意事項とイメージ

以上で，内点・外点・境界点の説明を終わるが

> これら内点・外点・境界点の3点は，きちんと場合分けになっており，つまりすべての場合を尽くし，かつ重複がない．
>
> つまり，R の部分集合 A を考えたとき，
>
> $$R = A^i \cup \partial A \cup \text{「}A\text{ の外点の集合」}$$
>
> が成り立つ．

ということに意識しておこう．

境界は私たちのイメージでは端と感じるが，位相空間論ではむしろ，内点でも外点でもないものを境界と定義している．

特に境界のイメージとしては，数直線 R を自分が泳いでいるとしよう．泳いでいるとぶつかる点，または違う陣地の境目の点と考えたらよいであろう (図 2-6 参照)．

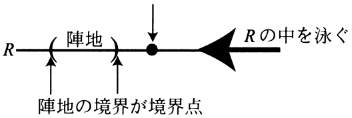


図 2-6　R において境界点のイメージ

2.4.5　「点」のまとめ

ここでいろいろでてきた「点」について具体例でまとめてみよう．ここでは R の中の集合 $A = (3, 5) \cup \{8\}$ について考える．

内部 A^i	$(3, 5)$	外部 $(A^c)^i$	$(-\infty, 3) \cup (5, 8) \cup (8, \infty)$
境界 ∂A	$\{3\} \cup \{5\} \cup \{8\}$	導集合 A^d	$[3, 5]$
孤立点	$\{8\}$	触点 (閉包 $\overline{A}$)	$[3, 5] \cup \{8\}$

これらをまとめてみることで，微妙にそれぞれ特徴をもって名前がつけられていることがわかるであろう．これらの結果を見てもわかるように，たとえば，孤立点は境界であることがわかるし，A に含まれない集積点 3 と 5 は A の境界点にもなっていることなどいろいろなことが具体的にわかる．また，一般に $A \not\subset A^d$，$A \subset \overline{A}$ が成り立つことがわかる．

閉包の表し方

それではまた触点・内点・外点・境界点などがたくさん特徴をもった点の種類が出てきたので，これらのいくつかをまとめて記号で表してみよう．A の触点全体の集合である閉包 $\overline{A}$ は，触点の定義 p.139 の式 (2-5) から，いままでの例をみてわかるように A の内点か境界点 (孤立点は境界点であった) の集合であることがわかる．だから式でかくと

$$\overline{A} = A^i \cup \partial A \tag{2-15}$$

となる (先ほどの節 2.4.5 で確かめよう)．また，A の点で，A の集積点でないものを孤立点といったので，A が孤立点を含むといった意味で

$$\overline{A} = A \cup A^d \tag{2-16}$$

ともかける．p.137 の閉集合の定義 2.2.11 を思い出してみよう．A に集積点があればすべて A に含まれるとき A は閉集合であると述べたが，この式 (2-16) から，A に集積点がない場合は (孤立点のみの集合をイメージしよう)，つまり

$$A^d = \varnothing$$

の場合は，

$$\overline{A} = A \cup \varnothing = A$$

となり，A は閉集合であることがいえる．

A^d は導集合 (集積点の集合) である．表現こそ違うが，数学書によってはこのようにいろいろな閉包の定義の仕方があり，お互いが同値であるということを自ら示すことによってはじめて理解したといえるだろう．

コメント

このように本によって閉包の定義がバラバラで，どれを採用するかは著者の意向にそうわけである．高校の参考書みたいに誰がかいても同じ表現ということはあり得ないのである．何度もいうが，表現の違う定義が出てきたときは，必ず同値性を自ら証明する必要があるし (もしくはたぶん同じで良いだろうというイメージを心から思えることである)，もし自分で証明ができるようになったら，それだけ数学の実力が伸びているということなのである．触点，境界点，集積点などのいろいろな言葉がでてきて，具体例を考えていくうちに境界点であり集積点であるものも存在して，同じような意味で混乱することがある．このときに，定義を見直して，自分できちっと説明できるようになると，また 1 つ数学の実力が伸びているのである．同じような意味の言葉が出てきたら，必ず整理する必要がある．

境界が数学的に定義できたところで，境界を使って閉集合を定義しよう．p.129 の節 2.2.8 のところで，集合で端 (境界) があるものが閉集合と思えるがそうでないということを述べた．またその段階では，端 (境界) があるかどうかで閉集合が定義されていなく，端 (境界) は閉集合の定義には関係ないともいいきったが，大変恐縮であるが，実はそうではない．数学的に境界が定義された場合，境界を用いても閉集合は定義できるのである．

2.4.6　定義 5：閉集合 (境界を用いた定義)

R において，その部分集合 A が閉集合であるとは，A に境界 ∂A があった場合，

$$\partial A \subseteq A \tag{2-17}$$

が成り立つときである．

ここで注意することがある．それは境界が $\varnothing$ のときである．

境界が空集合である閉集合

R においては R は閉集合であったが，R の境界は空集合である．なぜなら，$R^i = R$, $(R-R)^i = \varnothing^i = \varnothing$ なので，

$$\partial R = (R - R^i) \cap (R - (R-R)^i) = \varnothing \cap R = \varnothing$$

となり境界は存在しないが，R は閉集合である．p.133 でも述べたように，一般に任意の集合は空集合を部分集合としてもつ．つまり

$$\partial R = \varnothing \subset R$$

が成り立つので，R は閉集合である．これは，集積点があり集積点をすべて含めば閉集合であるという閉集合の定義に似ている．

境界を用いて閉集合を判断する

R の部分集合 $A = \{3\} \cup (5, 7)$ のとき，$\partial A = \{3\} \cup \{5\} \cup \{7\}$ であった．このとき，$\partial A \not\subset A$ であるから，A は R において閉集合でないが，R の部分集合 $B = \{3\} \cup [5, 7]$ のとき，$\partial B \subset B$ であるから，B は R において閉集合であるといえる．

同様にして，境界を使って開集合も定義できる．

2.4.7　境界を使った開集合の定義

R^2(もしくは R) において，その部分集合 A が開集合であるとは，A の境界 ∂A に対して，

$$\partial A \cap A = \varnothing \tag{2-18}$$

が成り立つときである．これは，

$$R - A \text{ が閉集合}$$

ということと同値である．

【証明】A が開集合，つまり $\partial A \cap A = \varnothing$ が成り立つ．このとき，$\partial A \subset X - A$ が成り立つので，$R - A$ は閉集合である．

以上でとりあえず，数直線上と平面での位相空間論の言葉の定義を解説してきたが，非常に事細かく名前が定義されていることがわかったであろう．何度も申し上げたが，少しでも特徴をもったら名前をつけるのが，大学の数学の特徴の 1 つである．このことが実感できたはずである．

いままでみてきた点や集合の定義は，2 次元平面 R^2 に拡張して考えると，さらに理解度が増すことは間違いない．数直線 R で考えてきた位相空間論のいろいろな言葉の定義を，平面 R^2 に次元を増やして考えよう．

2.5　平面 R^2 での言葉の定義 (開集合・閉集合など)

まずは，R^2 における開集合を定義しよう．R において R の部分集合 A が開集合であるとは，A の任意の点で ε 近傍がとれることであった．これは R^2 においても同じである．

2.5.1　平面 R^2 における ε 近傍の定義

平面 R^2 における

$$\boldsymbol{p} = (a,\, b) \qquad (p \text{ が太字になっていることに注意})$$

の ε 近傍は,

$$B_\varepsilon(\boldsymbol{p}) = \{(x,\, y) | (a-x)^2 + (b-y)^2 < \varepsilon^2\}$$

である．ここでひと言つけ加えておくと，大学ではベクトルを太字で表す．

2.5.2　平面 R^2 における開集合の定義

R^2 において，R^2 の部分集合 A が開集合であるとは，$\forall \boldsymbol{p} = (a,\, b) \in A$ において，

$$B_\varepsilon(\boldsymbol{p}) \subset A$$

となる，$\varepsilon > 0$ がとれることである．これは，R においての開集合の定義と全く同じ議論ができているということである．

平面 R^2 における開集合の例

p.122 の開集合の例 2.2.2 以下に述べているとおり，同様に R^2 において，ε 近傍 $B_\varepsilon(\boldsymbol{p})$ や R^2 は開集合である (証明略).

平面 R^2 における開集合の例

R^2 において，図 2-7 のような境界をもっていないようなアメーバのような図も開集合である．

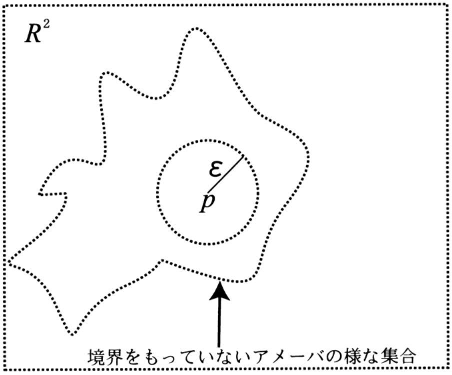


図 2-7　R^2 において開集合

コメント

これらの開集合の例をみてもわかるように，R^2 において考えるようになると，R における開集合の拡張で考えられる開集合もあれば (ε 近傍や R^2) もあれば，アメーバのような R における開集合の拡張で考えるのも難しい開集合が増えるのである．

次に，R^2 においての閉集合を定義しよう．閉集合のイメージは，特に平面 R^2 において考えると，理解力アップに威力を発揮する．閉集合の理解力アップには，平面 R^2 における閉集合を考えるのが一番よいと私の経験から断言できる．1次元 R から2次元 R^2 に広げることによって，さらに閉集合のイメージがわくに違いない．

R^2 においての閉集合の定義は，p.125 閉集合の定義 2.2.5，p.125 の閉集合の定義 2.2.6，p.137 の閉集合の定義 2.2.11，p.141 の閉集合の定義 2.2.13，p.153 閉集合の定義 2.4.6 の拡張，もしくは全く同じ内容で定義できる．

2.6 平面 R^2 における閉集合の定義

2.6.1 閉集合の定義 (点列を用いた定義)

R^2 の部分集合 A が閉集合であるとは，$(\alpha,\beta) \in R^2$ に収束する A の数列 $\forall\{(x_n, y_n)\} \in A$ (R^2 においての数列 (x_n, y_n) を以下**点列**という) があるならば，常に $(\alpha,\beta) \in A$ となるとき，すなわち，

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (\alpha,\beta) \qquad (\{(x_n, y_n)\} \in A) \to (\alpha,\beta) \in A \tag{2-19}$$

が成り立つとき，A を R^2 の**閉集合**という．つまり極限値を含んでいれば閉集合というわけである．

2.6.2 閉集合の定義 (開集合の補集合として定義)

R^2 の部分集合 A が R^2 において閉集合であるとは，

$$R^2 - A \text{ が } R^2 \text{の開集合である}$$

と補集合を用いる

2.6.3　閉集合の定義 (集積点を用いた定義)

数直線 R^2 の部分集合を A とする．A **に集積点がある場合**，その集積点すべてが A に属するとき，A を R^2 の**閉集合**という．

2.6.4　定義 4：閉集合 (触点を用いた定義)

一般に，集合 A が R^2 において，触点の集合 $\overline{A}$ で，

$$\overline{A} = A$$

が成り立つとき，A を R^2 において閉集合という．そして，$\overline{A}$ は A を包む閉集合のうちで最も小さいものである．

2.6.5　閉集合の定義 (境界を用いた定義)

R^2 において，その部分集合 A が閉集合であるとは，A に境界 ∂A があった場合，

$$\partial A \subseteq A \tag{2-20}$$

が成り立つときである．

それではいくつか具体例をみていこう．先ほど述べたが，閉集合の理解力アップには，平面 R^2 における閉集合を考えるのが一番よい．

R が R において閉集合であったように，R^2 も同様な議論ができる．

2.7　平面 R^2 において閉集合の例を考える

2.7.1　平面 R^2 での閉集合の例 (R^2)

R^2 において，R^2 は閉集合である．

【証明】

閉集合の定義で，収束する点列を使って考えよう．R^2 に属する任意の収束する点列の収束点は必ず R^2 に属するので，R^2 は閉集合である．

集積点の定義を使っても証明できる．p.134 の集積点の式 (2-4) に当てはめて考えると，$\boldsymbol{p} = (a, b) \in R^2$ に対して，

$$\{B_\varepsilon(\boldsymbol{p}) - \{\boldsymbol{p}\}\} \cap R^2 \neq \varnothing$$

であるから，R^2 の任意の点は，集積点になる．つまり R^2 の導集合 $(R^2)^d$ は

$$(R^2)^d = R^2$$

であり，閉集合の定義 2.6.3 より，R^2 は閉集合である．

【参考】

p.153 の例 2.4.6 と同様に，$\partial R^2 = \varnothing \subset R^2$ より，R^2 において，R^2 は閉集合である．

2.7.2　平面 R^2 での閉集合の例 (円盤)

円盤 $D^2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqq r^2\}$ は，R^2 の閉集合である．

これも，数直線の閉区間が，閉集合であることの 2 次元版への拡張であることはいうまでもない．

【証明】

証明は，R^2 において，$R^2 - D^2$ が開集合であることを証明すればよい．つまり，$R^2 - D^2$ の任意の点 $\boldsymbol{p}$ で，

$$B_\varepsilon(\boldsymbol{p}) \subset R^2 - D^2$$

となる ε 近傍がとれればいいのである．この ε 近傍がとれることの証明は，次の S^1 が R^2 において閉集合であることの証明にかいてあるので，ここでは証明を略する．

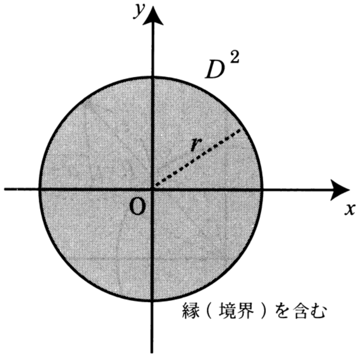


図 **2-8**　R^2 における円板

2.7.3　平面 R^2 での閉集合の例 (円)

R^2 の部分集合，円 $S^1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = r^2\}$ は，R^2 の閉集合である．

【解説】

これは私の経験からであるが，S^1 が R^2 において閉集合であることの意味ができると，閉集合とはどういうものか理解力が増したことに違いないと思っている

【証明 1 】(補集合を用いて証明)

まずは，閉集合の補集合を使って，つまり S^1 の補集合が開集合であることを使って証明しよう．

S^1 の補集合 $R^2 - S^1$ は，(i) $x^2 + y^2 > r^2$ の円の外側部分 U と (ii) $x^2 + y^2 < r^2$ の円の内側部分 V の 2 つに分けられる．それぞれ場合分けをして考えよう．それぞれの部分の任意の点で，ε 近傍が含まれることを証明したらよい．

(i) $x^2 + y^2 > r^2$ の円の外側部分 U において

U の任意の点を $\boldsymbol{p} = (a, b)$ として，$R = \sqrt{a^2 + b^2}$ とおく．このとき，$R > r$ で $\varepsilon_1 = R - r$ とおくと，

$$B_{\varepsilon_1}(\boldsymbol{p}) \subset U$$

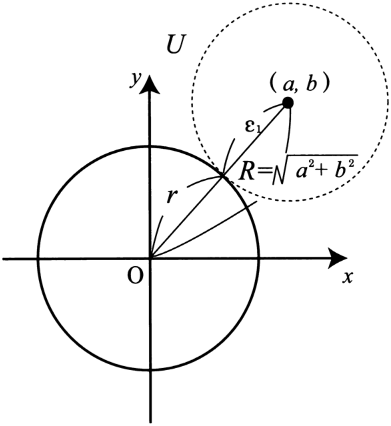


図 **2-9**　R^2 において S^1 は閉集合の証明

(ii) $x^2+y^2<r^2$ の円の内側部分 V

V の任意の点を $\boldsymbol{p}=(a,b)$ として，$R=\sqrt{a^2+b^2}$ とおく．このとき，$R<r$ で $\varepsilon_2=r-R$ とおくと，

$$B_{\varepsilon_2}(\boldsymbol{p})\subset V$$

となり (図は省略)，R^2-S^1 の任意の点で ε 近傍がとれたので，R^2-S^1 は開集合である．よって，S^1 は R^2 の閉集合である．

【証明 2】集積点を使った閉集合の証明

R^2 で部分集合 S^1 の集積点すべてが S^1 に含まれていることを確かめてみよう．S^1 の補集合 R^2-S^1 の任意の点は S^1 の集積点ではない．なぜなら先ほどの閉集合の証明をみてもわかるように，補集合の任意の点では，

$$B_{\varepsilon_1}(\boldsymbol{p})\subset U$$

ということは，

$$B_{\varepsilon_1}(\boldsymbol{p})\cap S^1=\varnothing$$

ということだからである．同様にして，$R^2 - S^1$ の S^1 内部にしてもそうである．また，S^1 上の 1 点 $\boldsymbol{p}=(a, b)$ をとって，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，

$$B_\varepsilon(\boldsymbol{p}) \cap (S^1 - \boldsymbol{p}) \neq \varnothing$$

であることは，図 2-10 をみてもわかることである．つまり，S^1 上の任意の点は，S^1 の集積点である．よって，S^1 の集積点はすべて S^1 に含まれるので，$(S^1)^d = S^1 \subset S^1$ より，S^1 は R^2 の閉集合であることが p.157 の定義 2.6.3 でも証明できた．

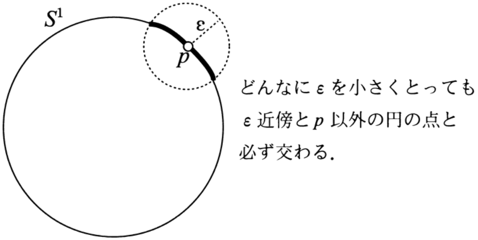


図 2-10　S^1 の集積点の様子

【参考】

S^1 の触点全体は S^1 より，つまり，$\overline{S^1} = S^1$ が成り立つので，S^1 は R^2 の閉集合であるとしてもよい．

【証明 3】収束する数列を使った閉集合の証明

$\boldsymbol{\gamma} = (\alpha,\beta)$ に収束する S^1 に属する点列 $\forall\{\boldsymbol{p}_n\} = (x_n, y_n)$ を考える．この (x_n, y_n) は，$(x_n)^2 + (y_n)^2 = r^2$ を満たすことに注意する．

ここで，S^1 が R^2 において閉集合であることを収束する数列を使って証明をするわけだが，背理法を使って証明しよう．つまり，

『$\exists\{\boldsymbol{p}_n\} = (x_n, y_n) \in S^1$ をとれば，$\boldsymbol{\gamma} = (\alpha,\beta) \notin S^1$ となるものが存在する』と仮定しよう．

$\boldsymbol{\gamma} = (\alpha,\beta) \notin S^1$ とは，(α,β) が S^1 の内側か外側にあるということであるから，ここでは内側にあると仮定しよう．つまり，$(\alpha)^2 + (\beta)^2 < r^2$ が成り

立つ．

$\boldsymbol{p}_n$ が $\boldsymbol{\gamma}$ に収束するということだから，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，$\exists m$ が存在して，$\forall n > m$，つまり m より大きい自然数に対応するすべての数列の項が

$$|\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{\gamma}| < \varepsilon$$

が成り立つということである．ただし，

$$|\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{\gamma}| = \sqrt{(x_n - \alpha)^2 + (y_n - \beta)^2}$$

であることに注意する．

ここで ε は任意であるから，【証明 1 】の (ii) の証明をヒントにして，

$$\varepsilon_1 = r - \sqrt{(\alpha)^2 + (\beta)^2}$$

とおくと，$\boldsymbol{\gamma}$ の ε 近傍 $B_{\varepsilon_1}(\boldsymbol{\gamma})$ は，S^1 に交わることなく，S^1 の内側にある．この ε 近傍 $B_{\varepsilon_1}(\boldsymbol{\gamma})$ の中には，$\forall n > m$，つまり m より大きい自然数に対応するすべての数列の項 $\boldsymbol{p}_n$ が入っていることを意味している (図 2-11 参照)．これは，$B_{\varepsilon_1}(r) \subset$「$S^1$ の内側」で，$\boldsymbol{p}_n \in B_{\varepsilon_1}(r)$，$\boldsymbol{p}_n \notin S^1$ ということである．

よって，$\{\boldsymbol{p}_n\} = (x_n,\, y_n) \in S^1$ に矛盾する．よって，S^1 に属する点列 $\forall\{\boldsymbol{p}_n\} = (x_n,\, y_n)$ の収束値 $\boldsymbol{\gamma} = (\alpha,\beta)$ は，

$$\boldsymbol{\gamma} = (\alpha,\beta) \in S^1$$

ということがいえて，p.156 の定義 2.6.1 より，S^1 は R^2 において閉集合であることが証明された．

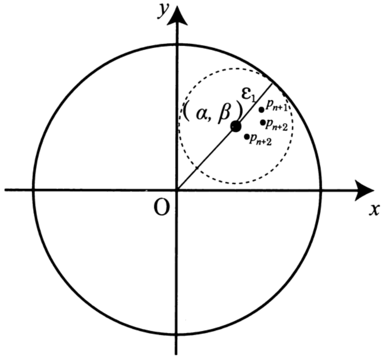


図 **2-11**　S^1 の内部の極限値の様子

【証明 4】境界を使った閉集合の証明

後先逆になるが，p.169 の例 2.8.2 より，

$$\partial S^1 = (R^2 - (S^1)^i) \cap \{R^2 - (R^2 - S^1)^i\} = \{(x,\, y)|x^2 + y^2 = r^2\} = S^1$$

である．よって，$\partial S^1 = S^1 \subset S^1$ より，R^2 において，S^1 は閉集合である．

またこの S^1 の例からもわかるように，もちろん楕円も R^2 において閉集合であることもいえる．

2.7.4　平面 R^2 での閉集合の例 (直線)

直線 $A = \{(x,\, y)|ax + by + c = 0\}$ は R^2 の閉集合である．

【証明】

R^2 において，直線は閉集合であるということである．補集合 $R^2 - A$ が開集合であることを示せばよい．図 2-12 を見てもわかるように，

$\forall (p,\, q) \in R^2 - A$ に対して，

$$\varepsilon = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

とおくと，

$$B_\varepsilon(p,\, q) \in R^2 - A$$

となり，$R^2 - A$ が開集合である．つまり，A は閉集合である．

この閉集合の証明は，S^1 が閉集合のときの証明と同じように収束する数列の極限値を使っても証明できるし，集積点を求めても証明できる．自分で証明してみよう．

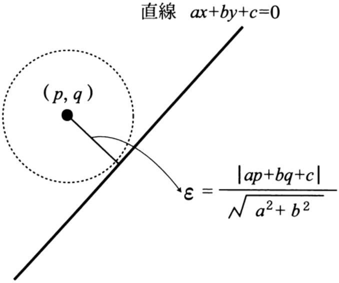


図 2-12　R^2 において直線は閉集合

この例からもわかるように，もちろん双曲線も R^2 において閉集合である．

2.7.5　平面 R^2 での閉集合の例 (格子点)

格子点 $A = \{(x, y)|x, y \in Z\}$ は，R^2 の閉集合である．

【証明】

$R^2 - A$ が開集合であればよい．平面 R^2 から格子点を除いたものは，図 2-13 のようになり，任意の点で，ε 近傍がとれればよい．$R - A$ の任意の点 $\boldsymbol{p}= (a, b)$ に対して，各格子点からの距離 $\sqrt{(a-m)^2+(b-n)^2}$, $\sqrt{(a-m-1)^2+(b-n)^2}$，$\sqrt{(a-m-1)^2+(b-n-1)^2}$, $\sqrt{(a-m)^2+(b-n-1)^2}$ を考え，この中で一番距離の短いものを，ε とおけば，$B_\varepsilon(\boldsymbol{p}) \subset R - A$ となるので，開集合である．よって，格子点 A は R^2 で閉集合である．

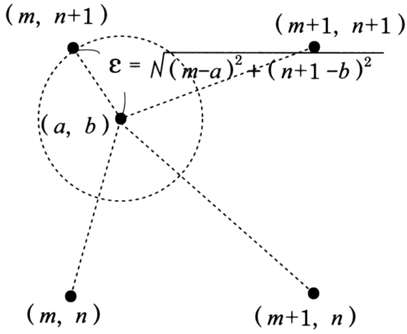


図 2-13　R^2 における格子点の近傍

【参考】

格子点 A の集積点全体は $\varnothing$ より，つまり，$A^d = \varnothing \subset A$ が成り立つので，格子点 A は R^2 の閉集合であるとしてもよいし，触点の集合 $\overline{A}$ は，$\overline{A} = A$ が成り立つので，閉集合としてもよい．

2.7.6　平面 R^2 での閉集合のいろいろなイメージ

平面 R^2 での閉集合のいろいろな具体例をあげてみた．中には式で表すものが難しい図形もあるが，閉集合がどのようなものかイメージできたらよい．

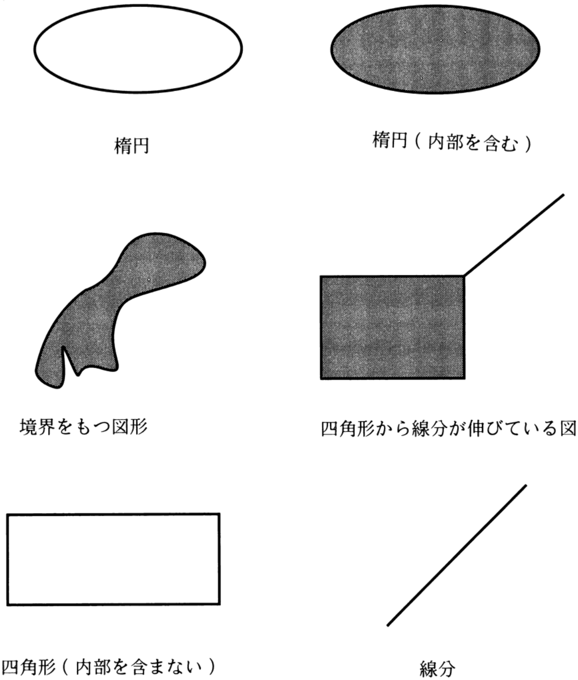


図 2-14　R^2 における閉集合のいろいろなイメージ

もちろん，円と R^2 の有限個の点の和集合 $S^1 \cup$ 点 $(a, b) \cup$ 点 (c, d) なども R^2 において閉集合である．

この例からもわかるように，閉集合とは閉区間や例 2.7.2 の円盤などのようなわかりやすいものだけではないことがわかったはずである．また，楕円や図のような閉曲線は R^2 で閉集合であることが安易に理解できる．図を見ることによって，R^2 においてどのようなものが閉集合かイメージで判断できるようにしよう．

コメント

これが開集合であるとか閉集合であるとか，証明はとてもむつかしい．すべての点列の収束値がその集合に収まるといっても，すべての点列を使って証明することは無理であることは明らかであろう (だから背理法を使うのがベスト)．証明をするときどこまでを大前提にしてよいのかわからない．

だから証明というよりは，イメージで，たとえば先の閉曲線は R^2 では閉集合であるが，具体的な数式でかかれているわけでもないがこれは閉集合と直感的に思って話を進めてもいいのである．大学の定期試験のとき，これが閉集合であることを証明せよという場合は，具体的な式で与えられているものである．数学の勉強をするときは (証明するときは) きちんと落ち度なく証明するわけであり，それが当たり前でいると，図 2-14 のような，式で表すことの難しい曲線や変わった図形が閉集合であることを証明せよというのは，どう証明してよいのか抵抗があるはずである．そしてどうやって証明してよいのかわからないから，ますます位相空間論がいやになる．だからこそ位相空間論は，イメージが大事でイメージで理解して正しければそれで良しという心構え・スタンスが必要である．その段階で，だいたいは簡単な位相空間の問題は証明できるようになっている．

ここで，開集合と閉集合の定義を簡単にまとめておこう．ここでは，R^2 として，A をその部分集合としておこう．

開集合の定義

(1) A の任意の点で，A に含まれる ε 近傍がとれる

(2) $X - A$ が閉集合

閉集合の定義

(1) A に含まれる任意の点列の極限値が A に含まれる
(2) $X - A$ は開集合
(3) A の集積点の集合 A^d で，$A^d \subset A$ が成り立つ．
(4) A の閉包 $\overline{A}$ で，$\overline{A} = A$ が成り立つ．
(5) A の境界点の集合 ∂A で，$\partial A \subset A$ が成り立つ．

これらをみてもわかるように，閉集合の定義はたくさんあり，位相空間論の本を執筆される先生によって，これらのどれを採用するのか違う．だから，はじめて学ぶ人にとってどの本を最初に使うかで閉集合のイメージが違ってくるのである．そしてよく使われる閉集合の定義 (2) であるが，この 5 つの定義の中で一番閉じている印象がない．これは勝手な私見であるが，残り 4 つは極限値，集積値などの言葉を使って定義されているので，これらの言葉を解説した後にはじめて閉集合の定義として語られるのである．しかし閉集合の定義 (2) は，開集合の定義の後にはじめて語ることができる．だから一番準備のいらない開集合の補集合として定義されるのが一番多いのもそのためではないかと思っている．また，ここでは証明しないが，もちろんこれらの閉集合の定義は同値で最初どれを閉集合の定義にするかで，残りはそれから導き出せる定理ともなるが，私の場合はすべて定義として解説した．

初心者が位相空間論の本の読み比べをしたときは，何がなんだかわからなくなる可能性もあるが，1 つずつ丁寧に解説すれば，閉集合のイメージもそれなりに理解できたはずである．もちろんどれを使ったら，閉集合であるかを簡単に証明できるか判断できるようになれば，かなり実力がついていると思われる．それに比べ，開集合の定義は非常にシンプルである．しかも，開集合は任意の点で近傍がとれる，位相空間の細胞である近傍をまとめた集合ともいえる．数学で，何かを使って定義するときは，よりシンプルなものを使って定義することが多い．これは，私の勝手な私見であるが，連結やコンパクト性などを定義するときも，いろいろな性質をもつ閉集合より，よりシンプルな開集合を使って定義するのもこのためだと私は考えている．

次に，R^2 においての図形 (集合) についても，触点や境界などを考えよう．

2.8　平面 R^2 での触点・孤立点・集積点・内点・外点・境界

2.8.1　平面 R^2 での円盤 D^2 の内点・外点・境界

R^2 の部分集合，

$$\text{円盤 } D^2 = \{(x,\, y) | x^2 + y^2 \leqq r^2\}$$

の，R^2 における内点・外点・境界

境界を求めるときは，p.148 の式 (2-13) の R の部分を R^2 に変えたらいいだけである．この円盤の内部は $(D^2)^i = \{(x,\, y)|x^2 + y^2 < r^2\}$，外部は $\{(D^2)^c\}^i = \{(x,\, y)|x^2+y^2 > r^2\}$，境界は $\partial D^2 = \{(x,\, y)|x^2+y^2 = r^2\} = S^1$ であり，円盤は R^2 において境界をもっているということである．あまりにも直感的にわかることなので，証明を省略する．また閉包 $\overline{D^2} = \{(x,\, y)|x^2+y^2 \leqq r^2\} = D^2$，導集合 (集積点の集合)$(D^2)^d$ も D^2 である．

2.8.2　平面 R^2 での S^1 の内点・外点・境界

次に，R^2 の部分集合，

$$\text{円 } S^1 = \{(x,\, y)|x^2 + y^2 = r^2\}$$

の R^2 における内点，外点，境界を考えよう．

まず内点であるが，S^1 の任意の点 $\boldsymbol{p} = (a,\, b) \in S^1$ に対して，$\boldsymbol{p}$ の ε 近傍 $B_\varepsilon(\boldsymbol{p})$ が，$B_\varepsilon(\boldsymbol{p}) \not\subset S^1$ であることは，図 2-15 より明らかである．

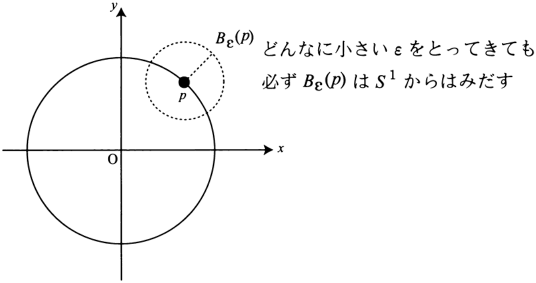


図 2-15　S^1 上の ε 近傍

つまり，内点をもたない．次に外点を考える．S^1 の外部 $\{(S^1)^c\}^i$ は，p.159 の例 2.7.3 の閉集合を証明したように，$(S^1)^c$ の任意の点で，ε 近傍 $B_\varepsilon(\boldsymbol{p})$ がとれるので，外部は $\{(S^1)^c\}^i = \{(x, y)|x^2 + y^2 < r^2, x^2 + y^2 > r^2\}$ である．境界は，内部がないから S^1 自体が境界になりそうだが，実際に証明してみよう．証明は，p.148 の式 (2-13) を使おう．$(S^1)^i = \varnothing$，$R^2 - (S^1)^i = R^2$，$(R^2 - S^1)^i = \{(x, y)|x^2 + y^2 < r^2, x^2 + y^2 > r^2\}$ なので，

$$(R^2 - (S^1)^i) \cap \{R^2 - (R^2 - S^1)^i\} = \{(x, y)|x^2 + y^2 = r^2\} = S^1$$

となり，R^2 において円 S^1 の境界は円そのものであることが証明された．

コメント

R^2 において S^1 の境界が S^1 といわれてもピンとこないかもしれないが，p.150 でも述べたように，R^2 の S^1 の外側や内側を泳いでいて，壁となってぶつかるところと考えたらよい．

p.164 の格子点についても，内点，外点，境界点を述べてみよう．

2.8.3　平面 R^2 での格子点の内点・外点・境界

R において，p.131 や p.149 のところで，1 点や整数の点の集合は孤立点にであり，閉集合でもあり，境界点にもなるということを述べた．だから，格子点も R^2 において，境界点になっているとイメージできたらかなり理解できているといえるであろう．それでは，数学的に証明してみよう．

格子点 $A = \{(x, y)|x, y \in Z\}$ とする，$A^c = R^2 - A$ の任意の点で，ε 近傍がとれるので (p.164 で証明済み)，つまり，p.146 の外点の定義式 (2-11) をそのまま，R から R^2 におきかえて，

$$B_\varepsilon(\boldsymbol{p}) \cap A = \varnothing$$

とできるので，$R^2 - A$ が外点の集合となる．また，任意の点 $\boldsymbol{p} = (a, b) \in A$ において，点 (a, b) には ε 近傍 $B_\varepsilon(\boldsymbol{p})$ が含まれないことは，図形的に明らかなので (図も省略する)，格子点 A の内点の集合 A^i は

$$A^i = \varnothing$$

である．よって，格子点の境界点の集合は，

$$\partial A = (R^2 - A^i) \cap (R^2 - (R^2 - A)^i) = R^2 \cap A = A$$

となり，格子点の集合そのものとなる．だから，$\partial A = A \subset A$ より，A は R^2 において閉集合といえる．

これも，先ほど述べたように，格子点が R^2 において境界点になっているとは，R^2 を泳いでいたらぶつかる点と考えたらよい．

以上でとりあえず，数直線上と平面での位相空間論の言葉の定義の解説を終わる．これらの定義は，非常に事細かく名前が定義されていることがわかったであろう．何度もいうが，少しでも特徴をもったら名前をつけるのが，大学の数学の特徴の 1 つである．このことが実感できたはずである．

また，**これらの言葉は，近傍を使ってすべてが定義されていることに注目しよう．つまり位相空間の根本をなすものは，近傍 (ここでは ε 近傍である) なのである．**このことをしっかり頭に入れておこう．

次に述べることは，位相空間を学ぶにあたって非常に大事な「相対的な考え」である．

2.9　相対的な考え

いままで開集合や閉集合などを考えるとき，必ず「R における」とか「R^2 における」をつけて開集合や閉集合を考えてきた．実は開集合や閉集合などは相対的なものなのである．つまり，他との関係において考え成り立つもの，また他との比較の上に考え成り立つものなのである．これをいままでの議論にあてはめれば，どの世界からその点や集合を考えているのかということである．**わかりやすくいえば，どこを泳いで集合 (図形) の特徴を考え (観察する) ということである．**この泳ぐという考えは，境界の具体例のところで R や R^2 で泳いで考えると同じ事である．開や閉が相対的概念なのだから、閉包 (closure) とか内部 (interior) の概念も当然、相対的である。たとえば，開という概念が相対的なものとすると，相手を取り違えたらどうなるかが問題である．たとえば，泳ぐ場所によって内点の意味が違ってくる．

この節では，いままであまり触れてこなかった，この相対的な考えを掘り下げて解説していくことにする．実はこの相対的な考えということが非常に大事なのである．この相対的な考えがいずれ位相空間の構成に深く関わっていくということがわかっていくだろう．それを実感してもらいたい．

この相対的な考えは，最初は何をいっているのかわからないであろうし，それは無理でもない．これは私の経験上であるが S^1 を考えるのが一番良いと考えている (もっともイメージがわきやすいと考えている)．まずは，S^1 について考えたいが，その前に基本に戻る必要がある．まずは開集合の基本 ε 近傍の定義から復習してみよう．

2.9.1　ε 近傍の確認

p.121 の ε 近傍の定義式 (2-1)

$$B_\varepsilon(p) = \{x|x \in R, |p - x| < \varepsilon\}$$

をよくみてみよう．R における ε 近傍の定義の条件の部分で，$x \in R$ とかいている．つまり $B_\varepsilon(p)$ を要約すれば，p を中心とした距離が ε 未満の R **の点**の集合という意味である．いままで当たり前のように考えていた，R の点ということが大事なのである．

2.9.2　『R における』から『X における』へ

ここで一般に (大学の数学はあらゆるものを一般化することを目標としていることが多い)R における』から『X における』へ変えてみよう．大前提が，R におけるを考えるとき

$$R^c = \varnothing$$

であったので，もちろん同様にして『X における』を考えるときは，

$$X^c = \varnothing$$

が大前提であることに注意する．

それでは，X における ε 近傍を定義しよう．

2.9.3　X における ε 近傍の定義

R の代わりに X として，X における ε 近傍を

$$B_\varepsilon(X, p) = \{x | x \in X, |p - x| < \varepsilon\} \tag{2-21}$$

で定義する．もっとわかりやすくかけば，

$$B_\varepsilon(X, p) = (p - \varepsilon, p + \varepsilon) \cap X \tag{2-22}$$

と同値である．

また X の部分集合 G が X の**開集合**であるといわれるのは，

$$\forall x \in G \text{ に対して，} B_\varepsilon(X, p) \subseteq G \text{ となる}\varepsilon\text{がとれることである} \tag{2-23}$$

となる．こういうふうにいままで使っていた考え方を一般化する．

こういうふうに，ε 近傍を一般化することによって，何が違ってくるのであろうか．X における ε 近傍を定義すると，開集合もいままで思っていたものと違ってくる場合が出てくる．これは，冒頭でも述べたように，相対的な考えにつながっているのであるが (どこで泳いで集合 (図形) を観察するかにつながってくる)，最初は本当に理解するのが難しい．

相対的な考えを解説するとき，ほとんどの本が閉区間や開区間を使って解説する本が多いが，それではあまりイメージできない (これは個人的な意見であるが $\cdots$)．しかし，ここでも他の本と同じように，まずは区間を使って解説もしておこう．

まずは，具体例を考えてみよう．

2.9.4　相対的な考えの具体例

X における ε 近傍の例

$X = [0, 1]$ として考えよう．節 2.9.2 でも述べたように，$[0,1]^c = \varnothing$ であることが大前提である．

$B_{\frac{1}{5}}\left(X, \dfrac{1}{2}\right)$，$B_{\frac{1}{2}}\left(X, \dfrac{1}{3}\right)$，$B_{\frac{1}{2}}(X, 0)$，$B_2(X, 0)$ を求めてみよう．定義式 (2-22) の方が直感的にわかりやすいので，定義式 (2-22) を使おう．

$$B_{\frac{1}{5}}\left(X, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{10}, \frac{7}{10}\right) \cap [0, 1] = \left(\frac{3}{10}, \frac{7}{10}\right)$$

$$B_{\frac{1}{2}}\left(X, \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right) \cap [0,\, 1] = \left[0, \frac{5}{6}\right)$$

$$B_{\frac{1}{2}}(X,\, 0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cap [0,\, 1] = \left[0, \frac{1}{2}\right)$$

$$B_2(X,\, 0) = (-2,\, 2) \cap [0,\, 1] = [0,\, 1]$$

結局この例をみてもわかるように，ε 近傍とは，端が入っているとかどうかよりも，基準点を中心としたある距離未満の点の集合という考え方であることがわかる (図 2-16 参照)．これは，R における ε 近傍の考え方で述べたとおりである．しかもこの例からわかるように，**各点において ε 近傍の種類が違っていてもよいということである．**

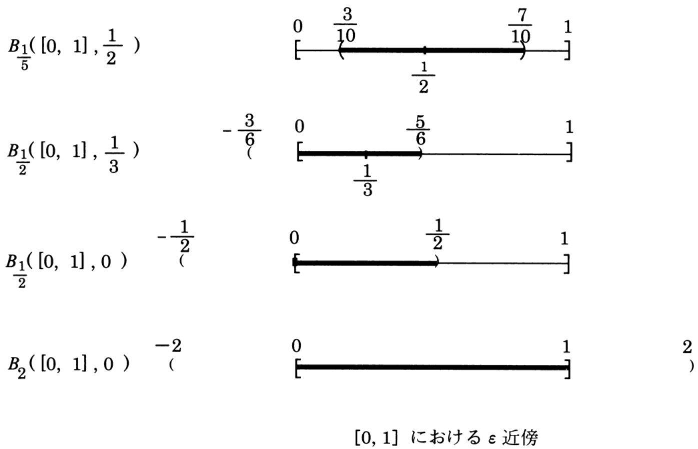


図 2-16　$[0, 1]$ における ε 近傍の様子

また，$\forall p \in [0,\, 1]$ に対して，

$$B_\varepsilon(X,\, p) = (p - \varepsilon,\, p + \varepsilon) \cap [0,\, 1] \subseteq [0,\, 1]$$

であるから，$\forall p \in [0,\, 1]$ に対して，p の近傍がとれたので，$[0,\, 1]$ **において** $[0,\, 1]$ **は開集合であるということである．**ということは，内点の定義に当て

はめて考えると，$[0, 1]$ において $[0, 1]$ の任意の点は $[0, 1]$ の内点になっているということである．つまり，

$$[0,\ 1]\ \text{において},\ [0,\ 1]^i = [0,\ 1]$$

がいえる．これももう一度述べるが，各点において ε 近傍の種類が違っていてもよいということが大前提で，しかもポイントは任意の点で ε 近傍がとれれば開集合であるということである

そして，$[0, 1]$ において $[0, 1]$ を考えるということは，

$$[0,\ 1]^c = \varnothing, \qquad \partial[0,\ 1] = \varnothing$$

ということで，境界と外点をもたないということである．これはまた，

$$\partial[0,\ 1] = \varnothing \in [0,\ 1]$$

ということがいえて，$[0, 1]$ において $[0, 1]$ を考えると **[0, 1] は閉集合でもある**ともいえる．

よって，一般に $[a, b]$ において $[a, b]$ を考えると，$[a, b]$ は開集合であり閉集合であるということが，容易に理解できるはずである．この性質は，R において R は，開集合であり閉集合であるという性質と同じである．これが一番大事である．このように，相対的に定義していることをあらためて議論すると，なにがなんだかわからなくなるだろう．この「$[0, 1]$ において」という考え方は何かぱっとしないであろう． もう 1 題例題を考えよう．

X における閉集合の例

さて，$[a, b]$ において $[a, b]$ は開集合であり，閉集合であった．となると，a においての ε 近傍，たとえば $\varepsilon < b$ のときは，$[a,\varepsilon)$ であり，これが $[a, b]$ において開集合だといわれると，すべてのものが開集合にみえてしまう．しかし，$[a, b]$ においても，R における閉集合と同じような感覚の閉集合をきちんと定義できる．

集合 X において，部分集合 A が X において閉集合とは，$X - A$ が開集合になるときである，つまり，任意の点で ε 近傍がとれると，R や R^2 のときと同様に定義できる．具体的にみていこう．

$X = [1, 10]$ において，$A = [3, 6]$ を考える．このとき，A は X において閉集合である．なぜなら，$X - A = [1, 3) \cup (6, 10]$ で，たとえば，1 ではたとえば ε 近傍 $[1, 2)$ がとれる．他にも，$\forall p \in (1, 3)$ では，ε 近傍は $\varepsilon = \min(p-1, 3-p)$ とおくと，$B_\varepsilon(X, p) \in (1, 3)$ である．同様にして，$(6, 10]$ についても任意の点で ε 近傍がとれるので，$X - A = [1, 3) \cup (6, 10]$ は X について開集合であるから，$A = [3, 6]$ は，$X = [1, 10]$ において閉集合である．

ちなみに，$A = [3, 6]$ の 3 においての ε 近傍 $B_\varepsilon(X, 3)$ を考えてみる．$B_\varepsilon(X, 3) = \{x||x-3| < \varepsilon\} \cap [1, 10]$ は，ε によって，$[1, 10], [1, 3+\varepsilon)$, $(3-\varepsilon, 3+\varepsilon)$ のどれかになり，どんな ε をとっても，$B_\varepsilon(X, 3) \notin [3, 6]$ であるから，開集合ではないこともわかる．

ここで証明や解説を略すが，$X = [1, 10]$ において，$A = [3, 6]$ を考えたときの，内点・外点・境界点などを求めてみよう．いままでの議論から次のようになることは容易に理解できるであろう．

内部 A^i	$(3, 6)$	外部 $(A^c)^i$	$[1, 3) \cup (6, 10]$
境界 ∂A	$\{3\} \cup \{6\}$	導集合 (集積点の集合)A^d	$[3, 6]$
孤立点	なし	触点 (閉包 $\overline{A}$)	$[3, 6]$

これらの結果をみてもわかるように,「R において (R^2 において)」と「X において」は全く同じ議論ができるということがわかったはずである．

ここでもう 1 度整理してみよう．R において R は，**開集合であり閉集合であった．しかも，**$R^c = \varnothing$ **であり，**R **の部分集合** $[3, 6]$ **は閉集合であった．そして，**R **の代わりに** $X = [1, 10]$ **に置き換えて，**$[1, 10]$ **において** $[1, 10]$ **を考えると，**$\mathbf{[1,\ 10]}$ **は開集合であり，閉集合である．しかも，**$[1, 10]^c = \varnothing$ **である．**$[1, 10]$ **の部分集合** $[3, 6]$ **は閉集合であったということである．気づいてほしいのは，**R **において** R **を考え部分集合を考えることと，**X **において** X **を考え部分集合の性質を考えることが全く同じ議論ができ，同じような性質をもっていることである．**

$[1, 10]$ において $[1, 2)$ を考える

R において $[1, 2)$ を考えると，開集合でも閉集合でもなかったが，$[1, 10]$ において $[1, 2)$ を考えると $[1, 2)$ は開集合である．なぜなら $(1, 2)$ の任意の点においてはもちろんのこと，点 1 においても，

$$B_\varepsilon([1, 10], 1) = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \cap [1, 10] = [1, 1+\varepsilon) \in [1, 2)$$

となる ε 近傍がとれるからである (ε をうまくとるという条件である).

$(0, 1)$ において $(0, 1)$ を考える

$(0, 1)$ において $(0, 1)$ を考えると，$(0, 1)$ は開集合であり，閉集合である．

閉集合の定義はいろいろあったが，一番最初に定義したのが，収束値が属するということで閉集合を定義した．すると，

$$\frac{1}{n} \in (0, 1)$$

を考え，収束値 0 が $(0, 1)$ に属していないから，$(0, 1)$ は閉集合ではないと考える人が出てくる．これは大きな勘違いである．$(0, 1)$ において $(0, 1)$ を考えるということは，

$$(0, 1)^c = \varnothing$$

ということ．つまり，$(-\infty, 0] \cup [1, \infty) = \varnothing$ ということで，元がない，考えないということで，**0 は考えない，考えてはいけない**ということである．だから，0 に収束する数列を考えてはいけないということで，$(0,\ 1)$ の中の数字に収束する数列を考えなさいということで，これは必然的に閉集合になる．

0 という数字こそ使っているが，$(0, 1)$ の中を泳いでいる人は，永久に 0 という境界点が見えなく，無限に続いていると見えるのである (R の中を泳いでいる感覚に陥っているのである)．$(0, 1)$ において考えるとはそういうことである．意味がわかるであろうか．R において $(0, 1)$ の中を泳いでいる人は，0 という境界点が見え，0 を超えた $(-\infty, 0]$ の部分が意識でき見えるのである．

次に，平面の図形で考えてみよう．

円盤 $D^2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqq r^2\}$ における ε 近傍

もちろん，D^2 において考えるということは，

$$(D^2)^c = \varnothing$$

を前提にしているということである．

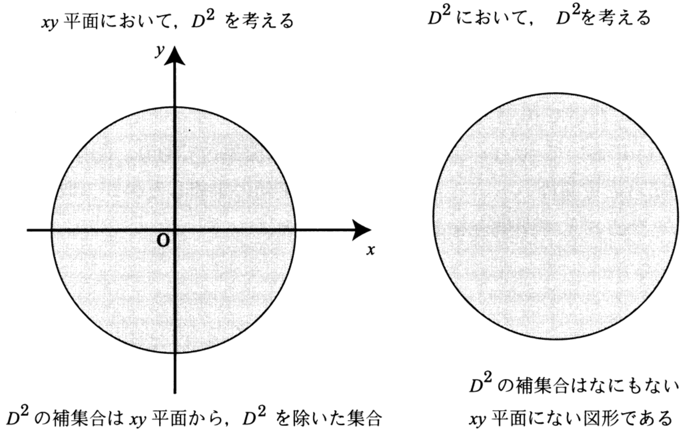


図 2-17　D^2 において D^2 を考える

もちろんいままでの議論と同じように，D^2 において D^2 を考えると，また，$\forall \boldsymbol{p} = (a, b) \in D^2$ に対して，

$$B_\varepsilon(D^2, \boldsymbol{p}) = \{(x, y) | (x-a)^2 + (y-b)^2 \leqq \varepsilon^2\} \cap D^2 \subseteq D^2$$

であるから，$\forall \boldsymbol{p} \in D^2$ に対して，ε 近傍がとれたので，**D^2 において D^2 は開集合である**ということである．特に閉区間同様に，境界における ε 近傍には注意する必要がある (図 2-18 を参照)

よって，もちろん

$$(D^2)^i = D^2$$

であるから，

$$境界 : \partial D^2 = \varnothing，外点の集合 : \{(D^2)^c\}^i = \varnothing$$

が成り立ち，

$$\partial D^2 = \varnothing \in D^2$$

なので，閉集合でもある．

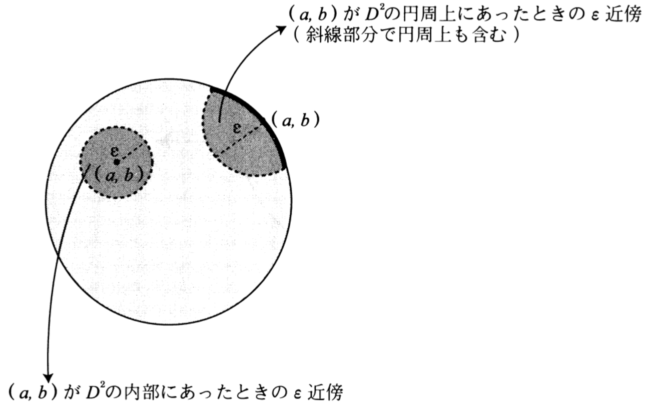


図 2-18　D^2 における ε 近傍

これを泳いでいる人にたとえて考えよう．D^2 の中で泳いでいる人は，$(D^2)^c = \varnothing$ という感覚なので，つまり D^2 の外側という感覚がないので，すべて内点という感覚になるということである．

いままでの議論のように，閉区間や開区間，または円盤 D^2 における開集合や閉集合，ε 近傍を考えてきたが，初心者にとって相対的な考えが一番理解しやすい良い例は，円 S^1 を考えることだと私は経験上考えている．それでは S^1 を使って，一般化された ε 近傍，それを使っての相対的な考え方から何が展開されるのか解説しよう．

S^1 を使って相対的な「考え」を考える (ε 近傍を考える)

円 $S^1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = r^2\}$ を考える．R^2 での円を考えると図 2-19 のようになり，$\boldsymbol{p} = (a, b) \in S^1$ に対して，**R^2 における $\boldsymbol{p}$ の** ε 近傍の定義式は，

$$B_\varepsilon(R^2, \boldsymbol{p}) = \{(x, y) | (x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon^2\} \cap R^2 \qquad (2\text{-}24)$$

であり，図 2-19 のようになる．つまり $\boldsymbol{p}$ を中心とする円盤であり，R^2 とまたがっている．

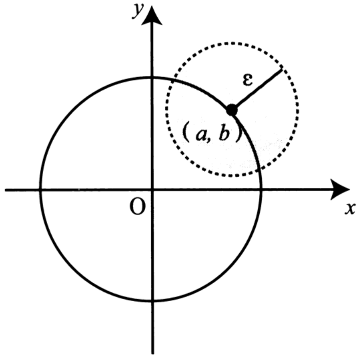


図 2-19　R^2 における円の近傍

これが，S^1 における S^1 の ε 近傍を考えるとなると

$$B_\varepsilon(S^1, \boldsymbol{p}) = \{(x, y) | (x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon^2\} \cap S^1 \tag{2-25}$$

となるが，いま S^1 において S^1 を考えているので，

$$(S^1)^c = \varnothing$$

である．つまり，S^1 以外の点は空集合で考えてはいけない．つまり，考えるときは S^1 のみで考え，R^2 の中で定義された平面 (2 次元の) の
ε 近傍 $B_\varepsilon(R^2, \boldsymbol{p}) = \{(x, y) | (x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon^2\}$ は使えないのである．なぜなら，これは R^2 で定義される ε 近傍であるからである．だから，次のように ε 近傍も考えないといけない．点の周りの集合として定義されているのが ε 近傍だから，$\boldsymbol{p} \in S^1$ を中心とする円内部の点の集合 (ε 近傍) を図 2-20 のように考えることである．この場合は，いままでみたいに中心点からの距離を，絶対値や三平方の定理を使った 2 点間の距離 (この数直線上の絶対値やピタゴラスの定理を用いたいままでの距離をユークリッドの距離という) で表せないことがわかるであろう．これが大事である．

この場合，2 点間の距離を具体的にかくことは難しいので，

$$\boldsymbol{p},\,\boldsymbol{q} \in S^1 \text{に対して}, d(\boldsymbol{p},\,\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p} \text{ と } \boldsymbol{q} \text{ の最短距離} \tag{2-26}$$

と定義してみよう．

この距離を考えたとき，別に円の線素 $dl = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ を用いて，2 点間の距離を

$$\boldsymbol{p} \text{ と } \boldsymbol{q} \text{ の距離} = \int_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{q}} dl$$

として 2 点間の距離を積分で定義する必要はない．先の式 (2-26) のように抽象的でもかまわない．

この場合 S^1 における S^1 の ε 近傍の定義は，$\boldsymbol{p} = (a,\,b),\,\boldsymbol{m} = (x,\,y) \in S^1$ として，

$$B_\varepsilon(S^1,\,\boldsymbol{p}) = \{(x,\,y)|d(\boldsymbol{m},\,\boldsymbol{p}) < \varepsilon\} \cap S^1 \tag{2-27}$$

となる．この ε 近傍の定義の仕方は R^2 の ε 近傍を利用せず．直接，円 S^1 上に，数学的な距離を定義してから ε 近傍を定義しているということである．この (2-27) の近傍の様子は図 2-20 の通りである．

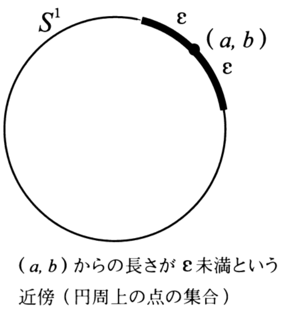


図 **2-20**　S^1 における円の近傍

いつも直線 R や平面 R^2 において，ユークリッド幾何 (高校まで学んできた幾何のことである) で ε 近傍を考えてきた．だから数直線 R 上では 2 点間の距離は絶対値を用いたし，R^2 では 2 点間の距離はピタゴラスの定理か

らでてくるものを使ってきた (これから以下，これらをまとめて**ユークリッドの距離**ということにする．また R や R^2 でユークリッドの距離を使う集合を**ユークリッド空間**という)．だから ε 近傍を，高校時代までに学んだユークリッドの距離というものを用いて考え，なんの疑いもなく使ってきた．しかし点の周りの集合として定義されている ε 近傍は先ほどの式 (2-26) で，**数学的な距離を定義することによって**，円の曲がった集合にも考えを直接持ち込ませることができることがわかったであろう．

> **ここで大事なことは，S^1 において S^1 の近傍を考えるということは，背後には R^2 という座標平面は全く考えないで，S^1 のみで，直接 ε 近傍やいろいろな点を考えていくということである．**

ここでは述べないが，**これが実は距離の一般化，つまり後ほど述べる距離空間の定義につながっていく．つまり高校時代までに使ってきたユークリッドの距離がさらにが一般化され，数学が展開されていくのである．**距離空間については，後述の節 2.10.1 で詳しく述べる．

いまの段階で理解しておいてほしいことは，つまりどんな距離を入れようと (どんな ε 近傍を考えようと：式 (2-25) と (2-27) を参照)，S^1 で S^1 を考えると，$\forall \boldsymbol{p} = (a,\, b) \in S^1$ の ε 近傍は，平面ではなくて，S^1 に含まれる曲線であるということである (ε 近傍はすべて S^1 の中にあるということ)．冒頭でも述べたように，しかも，S^1 のみで点を考えるものであるから，$(S^1)^c = \varnothing$ となっている．ここがポイントである．

R^2 における $\forall \boldsymbol{p} = (a,\, b) \in S^1$ の ε 近傍は，$\boldsymbol{p} = (a,\, b)$ を中心とする境界を含まない円盤 (図 2-19 参照) で，S^1 からはみ出していて，$(S^1)^c = R^2 - S^1$ であるということである．ここが大きな違いである．

もちろん内点・外点・境界も相対的なものなので全く違ってくる．S^1 で S^1 を考えると，S^1 の任意の点においてすべて ε 近傍を含むので (つまり，$B_\varepsilon(S^1, \boldsymbol{p}) \cap S^1 \subset S^1$)，$S^1$ の任意の点は S^1 の内点ということで，$(S^1)^i = S^1$ がいえて S^1 は開集合である．もちろん S^1 で考えているので，S^1 の外部

$((S^1)^c)^i = \varnothing$ であるし，p.148 の境界の定義式 (2-13) において，R を S^1 にかえればよく，

$$\partial S^1 = (S^1 - (S^1)^i) \cap (S^1 - (S^1 - S^1)^i) = \varnothing \cap S^1 = \varnothing$$

で S^1 においては，境界がないということになる．**このことは，R^2 で泳ぐと (R^2 において考えると) ぶつかる壁 S^1 を見つけることできるが，円の中で泳ぐとぐるぐる回るだけで，ぶつかる点が出てこない．永久に目印になる障害物 (境界点) なく回り続け泳ぐということである．これが，どこに立って図形 (集合) を観察するかという，相対的な考え方の結果の違いである．**

これはまた次のように考えることができる．つまり S^1 で S^1 を考えるということは，図 2-21 のように，3 人の人間が前にいる人の足をつかんで円を作り，内部どおしでコミュニケーションをとる．3 人にとってみれば，自分は円の内部にいると自覚するだろうから (外側を気にしないで円のみに集中するはずである)，3 人は円の内点になっているし，順番に自然数をいっていくとぐるぐる伝達がまわってきりがない．つまり境界がないといっていることと同じである．

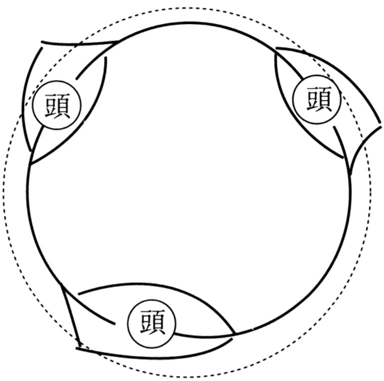


図 **2-21**　3 人が円をつくる

いままでの結果を表にまとめると次のようになる．

	R^2 において S^1	S^1 において S^1	$R(R^2)$ において $R(R^2)$
開 or 閉	閉集合	開集合かつ閉集合	開集合かつ閉集合
内部	$\varnothing$	S^1	$R(R^2)$
外部	$R^2 - S^1$	$\varnothing$	$\varnothing$
境界	S^1	$\varnothing$	$\varnothing$

となり，まったく結果の違ったものとなっていることに注意する．相手を取り違えることで，結果が全く違ってくるということである．ちなみにこれらの証明は S^1 については先ほどまで述べたとおりで，R^2 に関しては p.159 の例と p.169 の例 2.8.2 をみるとよい．また気をつけて気づいてほしいのは，S^1 において S^1 を考えることと，$R(R^2)$ において $R(R^2)$ を考えることとの性質が同じ特徴をもっていることである．

これは，いままで述べてきたように一般化できて，

> X において X を考えると，X **における** X **の** ε **近傍は** $\forall p \in X$ に対して，
>
> $$B_\varepsilon(X,p)(=\{x|d(x,p)<\varepsilon\})\cap X \subset X$$
>
> より，X の任意の点で，X に含まれるように ε 近傍がとれることを意味しているので，X の点はすべて内部の点 (内点) ということである (つまり，$X^i = X$)．この性質から，$\partial X = \varnothing \subset X$ より，X は閉集合である．
>
> X において X を考えるという前提より (X そのもので考えるということ)，$X^c = \varnothing$ である．$\varnothing$ は開集合であるから，X は閉集合でもあるということがこれからもいえる．

ということである．

これはつまり，いままで R や R^2 で部分集合を考えていたものが，一般の近傍の入った集合 X で，同じように部分集合を考えて，いろいろ議論して良いという数学的な後押しが入ったことも意味する．この感覚を身につけることが非常に大事である．そしてこの考えが，位相空間の定義 (公理) につながっていくのである．

スタートは，R において ε 近傍を定義して，R においては (R^2 においても)，任意の点で $B_\varepsilon(p) \subset R$ であるから R は開集合であるということだったことを思い出してほしい．それが，一般の近傍の入った集合 X の ε 近傍に拡張されたということにも気づいてほしい．

X において X を考えるというのは，特に大学の幾何学で普通に展開されることが多い．もう 1 つ同じような具体例を考えよう．たとえば，球面上の開集合を考えるとき (S^2 において S^2 の開集合を考えるとき)，数学的にどのように定義するのだろうか．

後ほど述べる位相空間論の基本の 1 つは，R や R^2 における開・閉集合などを，円や球面上における開集合や閉集合の定義に拡張することにある．つまり，円周上や球面上などで R や R^2 と全く同じ性質の議論ができるようにしようということである．これが位相空間の出発点の 1 つなのである．

私たちは，R や R^2 などまっすぐな空間 (図形) の中の集合 (図形) を考えていたが，それだけではなく，直接その曲がっている図形などに潜って泳いで図形の特徴を観察しようと考えることもできるのである．

球面 S^2 を使って相対的な「考え」を考える (ε 近傍を考える)

球面 S^2 の式は

$$S^2 = \{(x,\, y,\, z) | x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

である．まずは，R^3 における球面 S^2 の ε 近傍を考えよう．R^3 における球面 S^2 上の ε 近傍を考えると，図 2-22 のように球面からはみ出すことは明らかにわかるであろう．

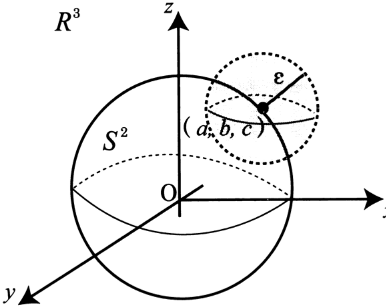


図 **2-22**　R^3 における球面上の ε 近傍

S^1 において考えたように，S^2 において S^2 の ε 近傍 (球面上のある点を中心としたある距離未満の集合) を考えるとき，少なくとも曲面上の長さ ε の長さの定義が必要なことがわかる.

ε 近傍は図 2-23 のように，R^2 と同様に境界を含まないような球面上の円盤であると安易に想像することができる.

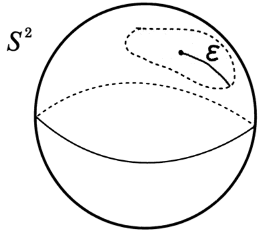


図 **2-23**　S^2 における球面上の ε 近傍

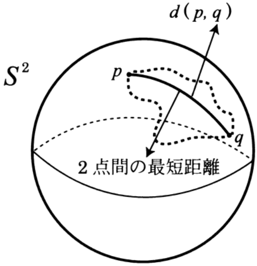
S^1 のおいての議論でも述べたように，この場合，いままでみたいに，R や R^2 上でのユークリッドの 2 点間の直線距離 (ユークリッドの距離) を使って ε 近傍を定義できないことは，曲面上が曲がっているから無理であるということは，図形的に明らかである．また，座標も入れていないので，ε の長さを式できちんとかくことも難しい．だからこそ，2 点間の距離というものを数

学的に定義する必要がでてくる．数学的な距離の定義は，次節の p.191 で定義する．ここでは，イメージで次節の数学的な距離の定義を満たしているものとして定義して, 解説しておこう．

この球面上の 2 点間の距離を，$p, q \in S^2$ に対して，

$$d(p, q) = 2 \text{ 点間の最短距離}$$

と具体的な数式を使わずに抽象的に定義する (図 2-24 を参照)．図のように，2 点間の距離 (道のり) は無数にあるので，どれを使って良いのかわからない．だからこそ数学的な距離の定義が必要なわけである．



図のように，2 点間の距離 (道のり) は無数にあるので
どれを使ってよいのかわからない

図 2-24　球面上の 2 点間の最短距離

イメージ的には，飛行機は地球の 2 点間の最短距離を基本的に飛行することになっているので，飛行機の空路だと思ったらよい．ちなみに，この距離の定義は，次節の p.191 で定義する数学的な距離 (関数) の定義を満たしている．

このとき，S^2 における $p \in S^2$ の ε 近傍を

$$B_\varepsilon(S^2, p) = \{x|d(x, p) < \varepsilon, x \in S^2\} = \{x|d(x, p) < \varepsilon\} \cap S^2$$

で定義すると，$B_\varepsilon(S^2, p) \in S^2$ で S^2 の任意の点で $B_\varepsilon(S^2, p)$ を含むので開集合である．つまり，$(S^2)^i = S^2$．

また閉円盤 $V_\varepsilon(S^2, p) = \{x|d(x, p) \leqq \varepsilon, x \in S^2\}$ を球面上に図 2-25 のようにもかくことができる．

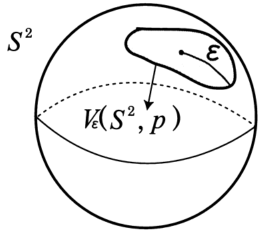


図 2-25　球面上の閉円盤

この場合境界部分 (縁の部分) では，ε 近傍を含むことができないので，開集合ではないし，補集合 $S^2 - V_\varepsilon(S^2, p)$ が，境界をもたない集合なので開集合であることは，直感的にわかる．だから $V_\varepsilon(S^2, p)$ は S^2 では閉集合である．

また，S^1 や S^2 もそれ自身で考えると，閉集合でもあるともいえた．これは，$(S^2)^i = S^2$ から，または $\partial S^2 = \varnothing \subset S^2$ からもいえる．閉集合とは何か，どういう特徴をもっていたか思い出してみる．私が最初に閉集合を定義したときは，収束する数列の極限値が属するものだと定義した．閉集合である以上は，S^1 や S^2 もその条件を満たしておかないといけない．これも座標とか導入せず図でイメージ解説しよう．図 2-26 を見てもわかるように，S^1 や S^2 収束する点列はの極限値は，必ず S^1 や S^2 からはみ出さず S^1 や S^2 の中にあるということがわかるであろう．

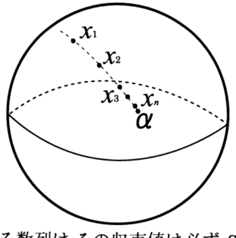


図 2-26　球面上の収束する数列のイメージ図

コメント

大学の数学の議論では，S^1 や S^2 が閉集合と考えるとき，これが閉集合であることを証明せよという問題の解き方を考えることも大事であるが，数学の議論の展開の中で，S^2 が閉集合であるから収束数列の極限値が必ず S^2 の中にあるから … というように，閉集合の特徴を語って議論するとが多いし，こういった扱い方に慣れる必要がある．

これは，p.179 の節 2.9.4 の最後でも述べたように，**これらのアイデアというのは，バックが R^2 であっても (R^2 において考えていても)， バックが S^2 であっても (S^2 において考えていても)，閉集合や開集合の議論が曲がっているかどうかの違いだけで，同じような性質の議論ができていることということである．これを数学的にきちんとして，同じような議論ができるという後押しが大事である．この R^2 で展開された開集合や閉集合の性質を，S^2 上においても同じように議論をしようというのが位相空間の出発点の 1 つである．** つまり，図形に限ってのいい方であるが，位相空間とは，R や R^2 のユークリッド空間の特徴をコピーした空間ともいえるのである．

これらの一連の話が，R や R^2 で議論してきたことが，S^1 や S^2 上などの曲がった図形上でも同じように開集合や閉集合など定義して (R や R^2 における開集合や閉集合などと同じように定義できて)，議論でき，話が進められるということが理解できただろう．このことは非常に大事である．

つまり，R や R^2 における事を，曲がった曲線や曲面上に同じように定義できて，しかも同じような性質をもって議論できるということが非常に大事なのである．よって，位相空間とは，R や R^2 で語られたことが，他の図形の上でも語られるということである．

コメント

図形的に，数式も使わずに図とイメージで説明した．大学受験など，数学の証明のほとんどは数式で証明してきた．だからこれが開集合だとか，これが閉集合だとか数式を使って証明しないとなんとも定期試験に出た

らどうしようか，位相空間論を勉強しているとき悩んでしまうことはよくあることである．こういった場合は，まずは図できちんと論理的に矛盾なく説明できるようにイメージで理解することが，この位相空間論では非常に大事で，定期テストでは指導教官にどこまでかけたら丸をもらえるかテスト前にきちんと聞いておくことが大事である．

開集合，閉集合，触点，集積点，孤立点，閉包，内部，外部，境界，内点，外点，境界．これらの言葉は，いままでできた言葉を並べたものである．きちんと 1 つずつ具体例をもって説明できるであろうか．大事なことは暗記よりも，イメージできているということである．それと，何回でもいうが少しでも特徴をもったら名前がつく．この細かい特徴をきちんと理解できているであろうか．何も見ないでいえたらかなり実力がついていると思っても間違いないであろう．数直線や平面で自分で集合を作って具体例を作ってみよう．

2.10　距離空間

それでは次に，先ほどの p.181 のところで宿題になっていた距離について考えてみよう．そこでは直線以外の距離について少し触れた．そして距離について，数学的に定義しないといけないとも述べた．いままで議論してきたことは，すでに絶対値や平面の 2 点間の距離など距離が入っているという大前提だった．絶対値や R^2 での 2 点間の距離を当たり前のように使ってきたが，実は距離を使って ε 近傍を使うときは,「この種類の距離を使いますよ」と宣言しないといけないのである．最初から勝手にユークリッド距離を使って，あたかも最初から当たり前のように使ってはいけないのである．

それならなぜ宣言もせずに使ったからというと，もし宣言せずに使えば，距離空間を定義して，高校時代当たり前のように使っていたユークリッドの距離がいきなりくつがえされ，何が何だかわからなくなる可能性が高くなるからである．また距離空間をいきなり定義すれば，次に簡単に演習して抽象的な位相空間の定義を説明するというような，一般の書店で売られているよ

うな「位相空間論」の本となんらかわらないからである．最初から抽象的な位相空間の定義を説明したところで，ほとんどの人が意味がわからない．

それよりも最初は位相空間論の言葉をしっかり理解するために，ユークリッドの距離 (絶対値など) が入っている数直線などで言葉の意味を説明した方が，高校数学になれた生徒にとって理解しやすいと考えたし，そのあとに距離空間や位相空間を解説しても経験上何ら問題ないと考えたからである．しかも，一般の位相空間論で，いろいろな言葉を定義したときも，結局はユークリッドの距離の入った例で考え，イメージ理解をすることが多いからである．

それでは，数学で定義する距離空間について説明しよう．理系の大学新入生にとって，距離といえば，数直線上の絶対値や座標平面上のピタゴラスの定理を用いた距離，たとえば平面上の 2 点間 (a, b), (c, d) の距離，

$$\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2} \tag{2-28}$$

などを思い描くであろう．これをユークリッドの距離ということにした．

しかし，p.181 で，円周上に最短距離で 2 点間距離を入れて，絶対値や三平方の定理から導かれる 2 点間の距離 (2-28) 以外の直線でない距離を導入した．この直線以外の距離は他にも考えられた．たとえば，p.185 の S^2 における球面上の ε 近傍で，2 点間の最短距離を考えた．これは，地球儀上の最短距離を飛ぶ飛行機の航路である．この最短距離は地球儀で糸を引っ張って簡単に考えることができるが，この球上の最短距離は明らかに直線ではないし，もちろんこの距離は，(2-28) で求めることができない．

だからこそ，2 点間の距離というものを数学的にきちっと定義しないといけないわけである．

数学では次の 3 つの式を満たすものを距離と定義する．

2.10.1　距離関数 (空間) の定義

集合 X の 2 点 $a, b, c \in X$ に対して，2 変数関数 $d(a, b)$ を考えて，
この $d(a, b)$ が

(1) $d(a, b) \geqq 0$, $d(a, b) = 0 \Longleftrightarrow a = b$

(2) $d(a, b) = d(b, a)$

(3) $d(a, b) + d(b, c) \geqq d(a, c)$

の 3 つを満たすとき，$d(a, b)$ を**距離関数**といい，この距離関数が定義されている集合を**距離空間**という．特に 3 番目の条件は $X = R^2$ のとき，三角形の 1 辺の長さ $d(a, c)$ が，他の 2 つの辺の長さの和 $d(a, b) + d(b, c)$ より大きくないことを意味している．

こうして距離を定義することによって，いままで当たり前のように使ってきた距離というものが，どうなるのか心配になってくるかもしれない．大事なことは，

> **位相空間を学ぶとき，距離空間 (距離関数) を考えた段階で，高校時代まで考えていた 2 点間の直線距離 (ユークリッドの距離) しか考えられないという考えを捨てることである．距離空間の定義を見ると，無限に 2 点間の距離をつくることができることは明らかであろう．極論すれば高校時代まで使っていたユークリッド空間のユークリッドの距離は，その無限個ある距離の 1 つでしかない．高校時代までは，無数にある距離空間の中の最も当たり前の (?) 距離を当たり前のように使って学習してきた．**

ということである．だから，いまからは「X で〜の式を使って 2 点間の距離を考えています」という意味で，(X, d) という記号で表すのである．逆にいうと，R^2 で考えるときもすでにユークリッドの 2 点間の距離を考えて，それしかないと思ったらいけないということである．もう 1 度確認するが，なぜこのような距離を定義するかというと，S^1 において S^1 を考えると，2 点間の距離について，ユークリッドの距離が使えなかったからである (これは，はっきりいって言い過ぎであるが，このような理由から距離空間を歴史的に定義したわけではない．この本の流れからなりゆきでそうなっただけである)．

とりあえずは，いろいろな距離関数を紹介して，最後にいろいろな距離関数を考えることでどのような数学的な違いが出てくるのか解説する．

それでは，距離空間の具体例を考えていくことにしよう．

距離空間の具体的な例 (ユークリッドの距離)

R^2 で，高校時代まで使ってきた 2 点間の距離 $\boldsymbol{p}=(a,\, b)$, $\boldsymbol{q}=(c,\, d)$,

$$d(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{q}) = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2} \tag{2-29}$$

も距離関数である．この距離関数が 3 つの距離関数の条件を満たすことを証明することは案外難しいし，テクニックもいる．それでも証明してみよう．証明には，**シュワルツの不等式**

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2$$

を使うが，ここでは証明しないで既知の事実として用いる．距離関数の 3 つの条件式のうち，距離関数の定義 (1) と (2) は省略する．距離関数の定義 (3) については，$\boldsymbol{r}=(e,\, f)$ として，$x_1=a-c$, $x_2=b-d$, $y_1=c-e$, $y_2=d-f$ とおくと，$x_1+y_1=a-e$, $x_2+y_2=b-f$ となるので，

$$\begin{aligned}
&(d(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{q})+d(\boldsymbol{q},\, \boldsymbol{r}))^2-(d(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{r}))^2 \\
&= (\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}+\sqrt{(c-e)^2+(d-f)^2})^2 \\
&\qquad\qquad -(\sqrt{(a-e)^2+(b-f)^2})^2 \\
&= \left(\sqrt{(x_1)^2+(x_2)^2}+\sqrt{(y_1)^2+(y_2)^2}\right)^2-\left(\sqrt{(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2}\right)^2 \\
&= 2\left(\sqrt{((x_1)^2+(x_2)^2)((y_1)^2+(y_2)^2)}-(x_1y_1+x_2y_2)\right) \geqq\ 0
\end{aligned}$$

(なぜなら，シュワルツの不等式より)

よって，

$$(d(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{q})+d(\boldsymbol{q},\, \boldsymbol{r}))^2 \geqq\ (d(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{r}))^2$$

がいえて，

$$d(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{q})+d(\boldsymbol{q},\, \boldsymbol{r}) \geqq\ d(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{r})$$

が得られる．

以上で，ユークリッドの距離の概念を満たすことがわかったが，証明は非常に難しかった．

さて，この R^2 のユークリッドの距離の ε 近傍，

$$B_\varepsilon(R^2, \boldsymbol{p}, d) = \{(x, y) | \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varepsilon\}$$

は，$\boldsymbol{p} = (a, b)$ を中心とする開円盤であることは，容易に理解できるであろう．

以下，R や R^2 でユークリッドの距離を使った距離空間を**ユークリッド空間**ということにする．

距離空間の例 2.10.1 と同様に，R^2 で距離を n 倍した

$$d(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = n\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

も距離関数の条件を満たし，距離を与えることは明らかであろう．

次は，距離関数の例で必ずといっていいほどあがる具体例である．

距離空間の具体的な例

$a, b \in R$ に対して，

$$d_0(a, b) = 3|b-a|$$

は R に距離を与え，(R, d_0) は距離空間である．

ここで注意してほしいことは，2 つある．まずは R は実数の集合であるということ．2 つ目はこういうふうに 2 点間の距離を定義した以上，高校までの 2 点間の距離を忘れ，この定義した距離を使って，ε 近傍を考えるということである．この式が距離関数であることを証明しよう．条件式の距離関数の定義 (1)(2) は明らかである．距離関数の定義 (3) についても，絶対値の性質より

$$d_0(a, b) = 3|b-a| = 3|(b-c)+(c-a)| \leqq 3(|b-c|+|c-a|) = d_0(b, c)+d_0(c, a)$$

がいえるので，$d_0(a, b) = 3|b-a|$ は距離関数である．

よって，一般に R において，

$$d_0(a, b) = n|b-a|$$

は距離を与えることも安易に理解できるであろう．

いま考えている距離空間では，たとえば数直線上の 1 と 3 の距離は，

$$d(1,\, 3) = 3|1-3| = 6$$

と考えるのである．もう一度述べるが，距離関数を定義したことによって，ユークリッド空間のいままで学んできた距離のことは忘れて，いま考えている距離関数のみに注目するのである．大事なことは出てきた距離の 6 という数字よりも，距離関数の 3 つの条件式が使えるという大前提が大事である．

また同じようにして，この距離関数に関しても ε 近傍というものを考えることができる．いままでの ε 近傍と同じように，

$$B_\varepsilon(R,\, a,\, d_0) = \{x|3|x-a| < \varepsilon\}$$

で定義しよう．たとえば，

$$B_6(R,\, 5,\, d_0) = \{x|3 < x < 7\}$$

となり，ユークリッド空間の標準の距離より幅が $\dfrac{1}{3}$ 倍に狭くなっているということである．ただし，ここで大事なことは，**どんな距離関数をいれた ε 近傍を考えようとも，ある点を中心としたある距離未満の集合であるという基本的な概念は維持されている**ということである．

次も，距離関数の例で必ずといっていいほどあがる具体例である．

距離空間の具体的な例 (離散距離)

$a, b \in R$ に対して，

$$d_1(a,\, b) = \begin{cases} 0 & (a = b) \quad \text{(2-30a)} \\ 1 & (a \neq b) \quad \text{(2-30b)} \end{cases}$$

と定めると，$(R,\, d_1)$ は距離空間である．この距離を特に**離散距離**という．たとえば，5 と 8 の距離は普通は 3 であるが，この距離関数を考えている世界では $d(5,\, 8) = 1$ である．こんなふうに漫画に出てくるような奇妙な世界である．

ユークリッド空間の距離になれてきた私たちにとって，こんな式で距離といわれてもなんとも変な気になるだろう．とにかく距離関数の条件を満たしていることを証明しよう．

距離関数の定義 (1) について，$a \neq b$ のときも $a = b$ も $d_1(a, b)$ は 0 以上であるし，$d_1(a, b) = 0$ となるのは，定義より $a = b$ のときである．距離関数の定義 (2) は明らかに成り立つ．

距離関数の定義 (3) については，$d_1(a, b) + d_1(b, c)$ と $d_1(a, c)$ の値を比較するが，a, b, c の関係について，次の 8 通りの場合分けがある (もっと要領のいい場合分けがあるだろうが，ここでは一番わかりやすい場合分けで説明する)．

$$
\begin{aligned}
&a = b,\, b = c,\, c = a \\
&a = b,\, b = c,\, c \neq a \\
&a = b,\, b \neq c,\, c = a \\
&a \neq b,\, b = c,\, c = a \\
&a = b,\, b \neq c,\, c \neq a \\
&a \neq b,\, b = c,\, c \neq a \\
&a \neq b,\, b \neq c,\, c = a \\
&a \neq b,\, b \neq c,\, c \neq a
\end{aligned}
$$

たとえば，$a = b, b = c, c = a$ のときは，$d_1(a, b) + d_1(b, c) = 0$ と $d_1(a, c) = 0$ となり $d_1(a, b) + d_1(b, c) = d_1(a, c)$ が成り立つし，$a \neq b$, $b \neq c, c = a$ のときは，$d_1(a, b) + d_1(b, c) = 2$ と $d_1(a, c) = 0$ となり，$d_1(a, b) + d_1(b, c) > d_1(a, c)$ が成り立つ．これらすべての 8 つの場合分けはすべて距離関数の定義 (3) が成り立つので，距離 $d_1(a, b)$ は距離関数である．

この離散距離も 2 点間の距離を与える．ここで (R, d_1) において，ε 近傍 $B_\varepsilon(R, a, d_1)$ を求めてみよう．

具体例を考え一般化してみよう．たとえば，

$$B_{\frac{1}{2}}(R, a, d_1) = \left\{ x | d_1(x, a) < \frac{1}{2} \right\}$$

を考えよう．a と x の距離が $\dfrac{1}{2}$ 未満の点の集合であるわけでが，$x = a$ のときは，x と a の距離を 0 と定義しているので，$a \in B_{\frac{1}{2}}(R,\, a,\, d_1)$ である．しかし，$x \neq a$ であれば，x と a の距離は 1 と定義しているから，a 以外の $x \in R$ はこの ε 近傍 $B_{\frac{1}{2}}(R,\, a,\, d_1)$ には属さない．よって，

$$B_{\frac{1}{2}}(R,\, a,\, d_1) = \{a\}$$

である．

次に

$$B_1(R,\, a,\, d_1) = \{x | d_1(x,\, a) < 1\}$$

を考えよう．これも先ほどの例と同じで，

$$B_1(R,\, a,\, d_1) = \{a\}$$

である．

次に

$$B_3(R,\, a,\, d_1) = \{x | d_1(x,\, a) < 3\}$$

を考えよう．a と x の距離が 3 未満の点の集合であるわけだが，$x = a$ のときは，x と a の距離を 0 と定義しているので，$a \in B_3(R,\, a,\, d_1)$ である．また先ほどまでの例と違って，$x \neq a$ であっても，x と a の距離は 1 と定義しているから，a 以外の $x \in R$ もこの ε 近傍 $B_3(R,\, a,\, d_1)$ には属する．つまり，R の点すべてが近傍になる．

$$B_3(R,\, a,\, d_1) = \{x | d_1(x,\, a) < 3\} = R$$

である．

以上まとめて一般化すると，

$$B_\varepsilon(R,\, a,\, d_1) = \begin{cases} \{a\} & (\varepsilon \leqq 1) \quad \text{(2-31a)} \\ R & (\varepsilon > 1) \quad \text{(2-31b)} \end{cases}$$

と少し変わった ε 近傍となるのである．

こんな特異な離散距離を導入したところで，距離空間の練習にもならないのではないだろうか．こんな変わった関数でも距離を与えるのだというほどの自覚だけで十分であろう．

距離空間の具体的な例

R^2 で，高校時代まで使ってきた 2 点間の距離 $\boldsymbol{p} = (a, b)$, $\boldsymbol{q} = (c, d)$,

$$d_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = |a - c| + |b - d| \tag{2-32}$$

も R^2 に距離を与え，(R^2, d_2) は距離空間である．距離関数の定義 (1)，(2) を満たすのは明らかなので証明しない．距離関数の定義 (3) については，$\boldsymbol{r} = (e, f)$ とすると，

$$\begin{aligned} d_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}) &= |a - e| + |b - f| \\ &= |a - c + c - e| + |b - d + d - f| \\ &\leqq |a - c| + |c - e| + |b - d| + |d - f| \\ &= (|a - c| + |b - d|) + (|c - e| + |d - f|) \\ &= d_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) + d_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}) \end{aligned}$$

となり，距離関数の条件を満たす．

(R^2, d_2) の ε 近傍

$$B_\varepsilon(R^2, \boldsymbol{p}, d_2) = \{(x, y) \mid |x - a| + |y - b| < \varepsilon\}$$

はどのような図形になるのであろうか．この条件式をみればわかるように，この不等式は高校の参考書に必ずといっていいほどのっている式である．

図にかけば，(a, b) を中心とする対角線の長さが 2ε である正方形である (図 2-27 参照)．ただし正方形の辺は入らない．

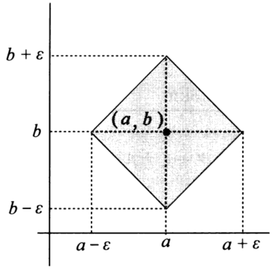


図 2-27　距離 $d_2(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q}) = |a-c| + |b-d|$ の ε 近傍

距離を入れた空間では，いままで高校時代に使っていたユークリッドの距離をきっぱり捨てるということが大事で，いま考えている距離のみで考えるという心構えが大事である．また，**いろんな距離関数を考えた集合でも，ε 近傍はある点の距離が〜未満の点の集合であるという考えを使うことができるという考えは変わらないことには注意しておく必要がある**

2.10.2　距離関数 (距離空間) を定義するにあたって

距離関数の定義をもう一度確認してみよう．距離関数は，R や R^2 などのユークリッド空間の 2 点に対して定義されるだけでなく，**集合 X の 2 つの元に対して関数が定義されているということである**．これは何を意味するのか，次の具体例をみて考えてみよう．

さて，いままでは R や R^2 で距離関数を考えてきたが，次に集合に対しても距離関数を定義してみよう．

距離空間 (距離) の具体的な例 (駅の集合)

神戸三宮と「京」コンピューターがあるポートアイランドを結ぶ無人電車ポートライナーの駅は全部で 9 駅あるが，簡単にするためにここでは代表的な駅 3 つを選びポートライナーの駅の集合 X を

$$X = \{\ \text{三宮，ポートターミナル，京コンピューター前}\ \}$$

で定義する．以下略して，$X=\{$ 三，ポ，京 $\}$ とかこう．お互いの駅の運賃と距離の様子は図 2-28 のとおりである．

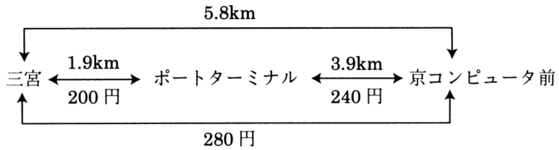


図 2-28　ポートライナーの駅

これらは単に駅の集合であって，これらの駅 (集合の元) にはお互い独立して関係がない．ここで次のような距離関数

$$d_s(a,b)=\text{駅 } a \text{ と駅 } b \text{ の距離}\quad \text{ただし，} a,\, b\in X$$

と定義すると，p.191 の 3 つの距離関数の定義を満たすので，これは距離関数になり，集合 X のそれぞれの駅に数学的な仲間 (ε 近傍) をつくることができる．

たとえば，三宮駅から半径 $\sim km$ 未満の駅とする仲間 (ε 近傍 $B_\varepsilon(\text{三})$) を考えてみよう. 気をつけることは，$B_\varepsilon(\text{三})=\{a|a\in X,\, d_s(a,\ \text{三})<\varepsilon\}$ なので，たとえば $B_5(\text{三})$ は，5km 未満の駅の集合となる．

$B_{1.9}(\text{三})=\{$ 三 $\}$，$B_{5.8}(\text{三})=\{$ 三，ポ $\}$，$B_{5.9}(\text{三})=\{$ 三，ポ，京 $\}$ と距離関数が定義された以上，ε 近傍を考えることができる．

距離関数というと，どうしても距離を思い浮かべてしまうが，次のように運賃でも距離関数を考えることができる．

距離空間 (運賃) の具体的な例 (ポートライナーの集合)

同じようにして，先ほどのポートライナーの駅の集合

$$X=\{\text{ 三宮，ポートターミナル，京コンピューター前 }\}$$

で考えよう．

ポートライナーの駅の集合 X を考えて，2 つの駅 a,b に対して，電車代 $d_u(a,b)$ を考えるとこの関数は距離関数になる．ただし，入場券は考えず各

駅では必ず改札を通してホームに上がり目的地に着いたら改札を通して出るとする．電車代は，図 2-28 を見るとよい．たとえば，$d_u(a, b)$ は 2 駅間の電車代を表すので必ず正であり，a 駅から乗って b 駅で降りても，また逆に b 駅から乗って a 駅で降りても運賃は同じなので，$d_u(a, b) = d_u(b, a)$ である．図 2-28 をみてもわかるように，たとえば

$$d_u(\text{三，ポ}) + d_u(\text{ポ，京}) > d_u(\text{三，京})$$

も成り立っていて，他の駅の組み合わせでも，距離関数の定義 (3) は成り立つので，駅の集合が距離空間になった．距離空間になったということで各駅について ε 近傍を考えることができる．たとえば，$B_{200\,\text{円}}(\text{三}) = \{\ \text{三}\ \}$，$B_{201\,\text{円}}(\text{三}) = \{\ \text{三，ポ}\ \}$，$B_{281\,\text{円}}(\text{三}) = \{\ \text{三，ポ，京}\ \}$ などである．

もう一つ集合に対して距離関数を考えてみよう．

距離空間 (運賃) の具体的な例 (バス停の集合)

ある関西都市のあるバス会社のバス停の集合 S を $S = \{a, b, c, d, e\}$ としよう．関西のあるバス会社では，バスの運賃をどの区間も一律 220 円という設定をしているので，2 つのバス停 a, b に対して，バスの運賃 $d(a, b)$ を

$$\text{バスの運賃}\ d(a,b) = \begin{cases} 220\,\text{円} & (a \neq b) \\ 0\,\text{円} & (a = b) \end{cases}$$

と定義すると，$d(a, b)$ は距離関数である．$a = b$ というのは，同じバス停で乗り降りしたら 0 円であるという意味である．

この証明は，p.195 の離散距離の定義のところで解説してある．$d(a, b)$ が距離関数となったところで，バス停の集合 S は距離空間に変わる．バス停の S の元それぞれは全くつながりがなかったが，距離関数を定義することによって，運賃でお互い仲間というものが定義できたということである．つまり，距離関数がバス停に定義されたことによって，もちろん ε 近傍も定義できるが，これは次のようになる．

$$B_\varepsilon(S, a, d) = \begin{cases} \{a\} & (\varepsilon \leqq\ 220\,\text{円}) \quad \text{(2-33a)} \\ S & (\varepsilon > 220\,\text{円}) \quad \text{(2-33b)} \end{cases}$$

となる．

つまり，a というバス停を中心に，220 円未満のバス停は $\{a\}$ のみであるし，220 円以上のバス停 a を中心とするバス停 (仲間) は，バス停すべてという意味である．

この**距離を定義することで，バラバラだった集合の要素に仲間というグループをつくることができる．この仲間こそが近傍なのである．そして，バラバラだった集合の要素に近傍という仲間をつくることこそが位相空間の第一歩なのである．** 詳しくいえば，数直線 R は実数の集合で，実数を小さい順に並べただけの視覚化された集合である．これは，距離関数を入れるまでは，実数と実数の間の仲間という関係はない．距離関数を入れてはじめて，近傍という数学的な点と点の仲間の概念ができていると考えるのである．位相空間とは任意の点で近傍が定義されている集合のことで，距離空間は任意の点で ε 近傍という近傍が定義されているので，位相空間となるという考えるのである．

また，R^2 上で定義した距離関数が違えば，ε 近傍の形も違ったように，集合に対して違う距離関数を定義しても ε 近傍の種類も違ってくるということである．

簡単な距離関数と ε 近傍を紹介したところで，一般の距離関数をいれた集合 X においての ε 近傍を定義しよう．

2.10.3　定義：一般の距離空間の ε 近傍

集合 X に距離関数 d が定義されているとき，$a \in X$ における ε 近傍を

$$B_\varepsilon(X,\, a,\, d) = \{x | d(x,\, a) < \varepsilon,\, x \in X\}$$

で定義する．いままでの ε 近傍と違うのは，条件式のところが，少し抽象的になっていることである．

一般の距離空間の ε 近傍が定義できたので，同じように一般の距離空間の開集合が定義できる．

2.10.4　定義：一般の距離空間の開集合

いままでユークリッド幾何においての距離で，ε 近傍を使って開集合を定義した．そのときの条件は集合の任意の点において，ε 近傍を含むことであった．同じようにして，一般の距離を入れた集合で，開集合を次のように定義できる．

距離空間 X の部分集合 V が X の**開集合**であるとは，$\forall x \in V$ に対して，

$$B_\varepsilon(X, x, d) \subseteq V \tag{2-34}$$

となる $B_\varepsilon(X, x, d)$ が存在することである．

定義を見てもわかるように，R や R^2 から X へ，ユークリッドの距離から抽象的な距離関数 $d(a, b)$ と少しずつ一般化されていることがわかるであろうか．

2.10.5　一般の距離空間の ε 近傍は開集合である

これは大事な性質である．p.122 で，数直線の標準の長さ ε 近傍を定義したとき，この ε 近傍は開集合であった．さらに一般化して，

ε近傍 $B_\varepsilon(X, x, d)$ は，X において開集合である

を証明しよう．いま距離関数にいままでのように具体的なものが与えられていない．p.122 のときのように，具体的に証明できないのではないかと思うがきっちり証明できるので，証明してみよう．3 つの距離関数の条件がきいてくる．

【証明】

$\forall p \in B_\varepsilon(X, x, d)$ に対して，$\delta = \varepsilon - d(p, x)$ とおく (図 2-29 参照)

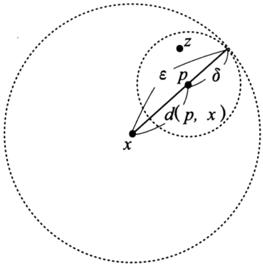


図 2-29　証明に使う ε 近傍のイメージ図

ここで，

$$B_\delta(X, p, d) \subseteq B_\varepsilon(X, x, d)$$

が成り立つことを証明すればよい．**証明のポイントは，$A \subseteq B$ を証明するのに，$\forall p \in A$ に対して，$p \in B$ を示すことである．**つまり，$\forall z \in B_\delta(X, p, d)$ に対して，$z \in B_\varepsilon(X, x, d)$ を示せばよいのである．これは，

$$\begin{aligned} d(z, x) &\leqq d(z, p) + d(p, x) \\ &< (\varepsilon - d(p, x)) + d(p, x) < \varepsilon \end{aligned}$$

がいえるので，$z \in B_\varepsilon(X, x, d)$ がいえた．よって，

$$B_\delta(X, p, d) \subseteq B_\varepsilon(X, x, d)$$

が証明できた．よって，距離空間の ε 近傍は開集合であることが証明できた．

こういった具体的な式がないにもかかわらず，距離関数の 3 つの条件を満たしていれば，きちんと証明できる．その分，かなり抽象的になりややこしくなっている．距離関数でたくさん具体例を出していくが，具体例よりもむしろ 3 つの条件式が使えるという気持ちをもつことが大事であると考える方がよい．

また，この内容を図にかいて考えると，距離関数を使って距離を一般化したといっても，結局は図のようにユークリッド平面に，ユークリッドの距離を使った図 2-29 をかいて考えてしまうものである．

ここで，蛇足？にはなるかもしれないが，言葉の定義をもう少ししておこう．

$$B_\varepsilon(X,\,a,\,d)=\{x|d(x,\,a)<\varepsilon,\,x\in X\}$$

であるが，特に，$d(x,\,a)$ がユークリッドの距離で R^2 の場合は，縁のない開円盤になったし，R^3 では縁のない開球になったので，これにちなんで
$d(x,\,a)$ がユークリッドの距離でなくても，**開球**といったりする．これがいつも開球のイメージにならないのは，p.195 の離散距離で解説した ε 近傍である．言葉の意味は，ユークリッドの距離からきていると思ったらよい．

先ほど，距離関数を定義して，距離関数は無限個あるということを述べた．たくさんの距離関数を紹介して，一気に 2 点間の距離が増えた．そして有名どころの距離関数を紹介して，いろいろな種類の ε 近傍ができ，一気に ε 近傍の種類も無限個になった．いろんな距離関数を入れることによってどのようなことがいままで学んだことと変わっていくのか，考えてみよう．

2.10.6 導入する距離によって内点・外点などはどのように変わるのか

離散距離を入れた距離空間の内点など

実数の集合 R に，離散距離 $a,b\in R$ に対して，

$$d_1(a,\,b)=\begin{cases}0 & (a=b) \quad \text{(2-35a)}\\ 1 & (a\neq b) \quad \text{(2-35b)}\end{cases}$$

を定義すると，ε 近傍 $B_\varepsilon(a,\,d_1)$ は，

$$B_\varepsilon(R,\,a,\,d_1)=\begin{cases}\{a\} & (\varepsilon\leqq 1) \quad \text{(2-36a)}\\ R & (\varepsilon>1) \quad \text{(2-36b)}\end{cases}$$

であった．開集合の定義が，任意の点で ε 近傍を含むということだった．ということは，この距離空間において，**1 点** $a\in R$ は，$B_\varepsilon(R,\,a,\,d_1)=\{a\}\subset a$ となる，ε 近傍がとれるので ($\varepsilon\leqq 1$ のとき)，**1 点** $a\in R$ は，開集合！である．つまり，R の任意の部分集合はすべて開集合！ということがいえる．

よって，たとえば，閉区間 $[a,\,b]$ の内点の集合も，$[a,\,b]^i=[a,\,b]$ となる．また，閉区間 $[a,\,b]$ の外部も，$(-\infty,\,a)\cup(b,\,\infty)$ であるし，
境界 $\partial[a,\,b]=(R-[a,\,b]^i)\cap(R-(R-[a,\,b])^i)=\varnothing$ である．閉集合ももち

ろんある．たとえば，$\partial[a, b] = \varnothing \subset [a, b]$ であるから，閉区間 $[a, b]$ は閉集合でもあるのである．

コメント

なぜ，この距離を離散距離というかというと，これは私の私見であるが，p.236 でも述べているように，近傍とはある点を中心とした仲間である．ということは，離散距離を入れると，ε 近傍が 1 点の場合もあるので，1 点自分自身が仲間であることもあり，他の点と離れて散っているという印象を与えているからかもしれないと思っている．

距離 $d_3(a, b) = n|b - a|$ を入れた距離空間の内点など

$a, b \in R$ に対して，

$$d_3(a, b) = n|b - a|$$

は R に距離を与え，(R, d_3) は距離空間である．これが距離空間になることは，$n = 3$ のとき，p.194 の例で説明している．この場合の，内点や外点など同じように考えてみよう．この距離を入れた場合の ε 近傍 $B_\varepsilon(R, a, d_3)$ は，

$$B_\varepsilon(R, a, d_3) = \left(a - \frac{\varepsilon}{n}, a + \frac{\varepsilon}{n}\right)$$

なので，ユークリッドの距離を入れた普通の ε 近傍 $B_\varepsilon(R, a, d)$ の幅を $\dfrac{1}{n}$ 倍したものなのである．よって，$B_\varepsilon(R, a, d_3) \subset B_\varepsilon(R, a, d)$ が成り立つので，ユークリッドの距離を入れた距離空間の内点，外点などと変わらないということである．先ほどの例の続きでいうと，**1 点** $a \in R$ は，$B_\varepsilon(R, a, d_3) \not\subset a$ より開集合ではないし，よって，たとえば，閉区間 $[a, b]$ の内点の集合も，$[a, b]^i = (a, b)$ となる．また，閉区間 $[a, b]$ の外部は，$(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ であるし，境界 $\partial[a, b] = (R - [a, b]^i) \cap (R - (R - [a, b])^i) = \{a\} \cup \{b\}$ である．閉集合ももちろんある．たとえば，$\partial[a, b] = \{a\} \cup \{b\} \subset [a, b]$ であるから，閉区間 $[a, b]$ は閉集合である．

よって，ユークリッドの距離 (絶対値で長さを定義) を導入した距離空間と同じ結果を得た．

以上の説明でも分かるように，結局は，**内点や外点，開集合や閉集合の概念 (ここでは位相の性質といっておこう) は，集合に定義された ε 近傍の種類によって変わってくる**ということである．逆に，ユークリッドの距離と違う距離関数を入れても，先ほどの例のように，位相の性質が変わらないものもあった．なにがなんだか分からなくなるかもしれないが，ようは慣れである．

次節で説明する距離を使わない一般の近傍を入れた位相空間でも，考える近傍によって内点や外点，開集合や閉集合の概念が変わってくる．つまり，位相の性質は，距離空間の場合，距離関数の定義の仕方で変わるのである．強いていえば，ε 近傍という近傍の取り方によって，位相の性質が変わるということである．ただ X において考えた場合，集合 X そのものは，距離関数の違いによって，開集合になったりならなかったりするということはない．どんな距離を入れようとも，X の任意の点で ε 近傍がとれるので，開集合になっているということはいえる．

以上のように，ユークリッドの距離を入れた距離関数を使わなくても，ユークリッドの距離を入れた位相の性質が同じ場合とそうでない場合がある．その違いは何であろうか．そこで，次のような同値な距離という概念を導入する．無限個種類がある ε 近傍もいくつかの種類に分けられることがわかるであろう．

2.10.7　同値な距離の定義

集合 $X(\neq \varnothing)$ に 2 つの距離 d, d' が定義されていて，距離空間 (X, d) の開集合は距離空間 (X, d') の開集合であり，逆に，距離空間 (X, d') の開集合が距離空間 (X, d) の開集合であるとき，d と d' は互いに**同値な距離**であるという．

そして集合 $X(\neq \varnothing)$ の 2 つの距離 d, d' が同値であるための必要十分条件は，

(1) $\forall x \in X$ と任意の ε 近傍 $B_\varepsilon(X, x, d)(\varepsilon > 0)$ に対して，$B_\delta(X, x, d') \subset B_\varepsilon(X, x, d)$ となるような，$B_\delta(X, x, d')(\delta > 0)$ が存在する．

(2) $\forall x \in X$ と任意の ε 近傍 $B_\varepsilon(X, x, d')(\varepsilon > 0)$ に対して，$B_\delta(X, x, d) \subset$

$$B_\varepsilon(X, x, d') \text{ となるような，} B_\delta(X, x, d)(\delta > 0) \text{ が存在する．}$$

の 2 つの条件が成り立つことである．いっていることは，ごちゃごちゃしてわかりづらい面もあるので，手っ取り早く具体例を見せることによって，何がいいたいのかイメージしよう．同値な距離だとどういうことがいえるのか，具体例で解説しよう．

先ほど，数直線 R に，ユークリッドの距離 $d(a, b) = |b-a|$ と，$d_3 = n|b-a|$ のどちらを使っても，内点，外点などの位相の性質は変わらなかった．この 2 つの距離は同値な距離という．

また，離散距離 d_1 とユークリッドの距離 $d(a, b) = |b-a|$ は，内点，外点などの位相の性質は違ったので，同値な距離ではない．

もう 1 つ R^2 において，ユークリッドの距離 d(p.193) と，ε 近傍が正方形になるような距離 $d_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = |a-c| + |b-d|$(p.198) を考える．図 2-30 と図 2-31 をみても分かるように，たとえば境界をもたない集合 U は，開集合になる．つまり，距離 d と距離 d_2 は同値な距離となる．

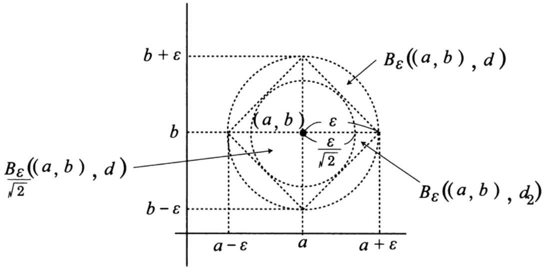
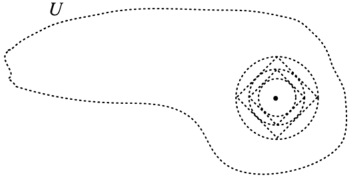


図 2-30　距離 d と距離 d_2 の ε 近傍の大小関係



結局，距離 d を使おうが，距離 d_2 を使おうが，それぞれの ε 近傍は，ε のとり方によって，ε 近傍を含んだり，含まれたりすることができるので，両方の近傍は境界をもたない集合 U に含まれる．つまり，どっちの距離を使っても集合 U は開集合になるということである．

図 2-31 距離 d を使おうと距離 d_2 を使おうと開集合は変わらない

これらの同値な距離の証明は簡単にできる．たとえば，$d(a,\ b) = |b - a|$ と，$d_3 = n|b - a|$ の距離の同値性であるが，ε 近傍の幅
$B_\varepsilon(a,\ d)$ は $B_{\varepsilon_3}(a,\ d_3)$ の n 倍であることに注意して（つまり，$\varepsilon = n\varepsilon_3$），$\forall\varepsilon > 0$，$B_{\varepsilon_3}(a,\ d_3) \subset B_\varepsilon(a,\ d)$ は常に成り立つ．つまり，そんな $\varepsilon_3 > 0$ が存在する．また逆に $\forall\varepsilon_3 > 0$ に対して，$\varepsilon = \varepsilon_3$ とおけば，
$B_\varepsilon(a,\ d) \subset B_{\varepsilon_3}(a,\ d_3)$ が成り立つので同値である．

また，ユークリッドの距離 $d(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q}) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ と
距離 $d_2(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q}) = |a - c| + |b - d|$ の同値性であるが，それぞれの ε 近傍をそれぞれ $B_\varepsilon(\boldsymbol{p},\ d)$，$B_{\varepsilon_2}(\boldsymbol{p},\ d_2)$ とすると，$\varepsilon = \varepsilon_2$ として，図 2-30 より，
$B_{\varepsilon_2}(\boldsymbol{p},\ d_2) \subset B_\varepsilon(\boldsymbol{p},\ d)$ とできる．実際に，$\boldsymbol{q} = (c,\ d) \in B_{\varepsilon_2}(\boldsymbol{p},\ d_2)$ に対して，$d_2(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q}) < \varepsilon$ であるから，

$$
\begin{aligned}
d(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q})^2 &= (a-c)^2 + (b-d)^2 \\
&\leqq (a-c)^2 + (b-d)^2 + 2|a-c||b-d| \\
&= (|a-c| + |b-d|)^2 \\
&= d_2(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q})^2 < \varepsilon^2
\end{aligned}
$$

より $d(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q}) < \varepsilon$ で，$\boldsymbol{q} = (c,\ d) \in B_\varepsilon(\boldsymbol{p},\ d)$ がわかる．

また逆に，$\forall\varepsilon_2 > 0$ に対して，$B_{\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{2}}}(\boldsymbol{p}, d) \subset B_{\varepsilon_2}(\boldsymbol{p}, d_2)$ が成り立つ．実際 $d(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ であるから $2\{(a-c)^2+(b-d)^2\} \leqq \varepsilon^2$，そして，$(a-c)^2+(b-d)^2 \geqq 2|a-c||b-d|$ が成り立つことに注意して，

$$
\begin{aligned}
d_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})^2 &= (|a-c| + |b-d|)^2 \\
&\leqq 2\{(a-c)^2 + (b-d)^2\} \\
&= 2d(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})^2 < \varepsilon^2
\end{aligned}
$$

となり，$d_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) < \varepsilon$ で，$\boldsymbol{q} = (c, d) \in B_\varepsilon(\boldsymbol{p}, d_2)$ となり，以上から同値であることが証明された．とにかく図 2-30 で何度も確かめよう．

最後に $d(a, b) = |b-a|$ と離散距離 d_1 が同値でないことを証明しよう．離散距離は $\varepsilon \leqq 1$ のとき，$B_\varepsilon(a, d_1) = \{a\}$ と 1 点のみであったので，どんな $B_\varepsilon(a, d)$ をもってきてもこの ε 近傍は無限個の点を含むので，
$B_\varepsilon(a, d) \not\subset B_\varepsilon(a, d_1)$ ($\varepsilon \leqq 1$ のとき) であるので同値ではない．よって位相の性質は変わる．

距離関数に関しては，これくらいにしておこう．何度も述べたが，集合に定義する距離関数によって，内点，外点，開集合などの位相の性質が変わった．これは，定義する距離関数によって，ε 近傍という近傍の様子が違ってくるので，位相の性質が変わるという意味である．逆に，**同値な距離でなければ，お互いの内点，外点などの位相の性質が変わっていくということである**それだけ理解できれば，初心者にとってはとりあえずは十分だと経験上考える．

コメント

距離関数を集合に定義したときに，絶対に出題されるといっても過言ではないのが，次の関数が距離関数かどうか調べよという問題である．たとえば，$d(x, y)$ が距離関数のときの $d_0(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ や先に紹介した離散距離，また R^2 において $d(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \max\{|a-c|, |b-d|\}$ など，こん

な変わった関数をだしてきて，距離関数であることを証明せよという問題が出題されることが多い．ましてや，いきなり有界な関数全体の集合 X をだしてきて，$f, g \in X$ に対して，$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)||x \in R\}$ と定義すると，d は X における距離関数であるという問題もよく出題される．

確かにこのような初心者にとって，変わった関数が距離関数であることを証明できるようになることは大切であるが，初心者にとっては，どうして距離関数を考えるのかを教える必要があるし，これらの距離関数を入れることによって，この集合がどうなるのかという考えをもつことの方が大事である．私は，この観点から距離関数の節を説明した．とにかく，距離関数かどうかだけを判断できるだけで終わるようなことがないようにしよう．

さていよいよ，一般の位相空間について解説することにしよう．位相空間の内容は，いままで解説してきた，R や R^2 で述べてきたいろいろな言葉の定義や距離関数などが理解できていると，ある程度のイメージができている．いまから解説する位相空間は，より抽象的になった一般的な位相空間である．

以下これから位相空間論を解説していくことになるが，位相空間の話はとても慎重に語らないといけない．なぜなら，位相空間論の定義は，大学の数学の根幹をなすもので，非常に抽象的かつ厳密で，科学でいう原子レベルの話で，非常に細かいところから定義し積み上げていくものであるからである．公理 (議論を始めるための出発点となる主張である) から出発する話も多々ある．先にも述べたが，**少しでも特徴をもったら名前を定義し議論していく**．位相空間論は原子レベルの細かい話だから，ちょっとした例外が見つかることも多々みられると考えられる．私は位相空間論の専門家ではないし，位相空間論を極めた素人でもないので，完璧に例外を含んで説明できるわけではない．私が自信を持って解説したものも，ひょっとしたら例外があるかもしれない．だから，以下の議論で部分的には断定したかき方はできない部

分があることは了承いただきたい．だからこそ，位相空間論の本をかかれた大学の先生方は非常に優秀であると思っている．

2.11　位相空間

位相空間を学ぶにあたって，次のようなことを心構えとしてまず持っておく必要がある．それは,『集合から近傍が定義された新しい世界を作っていく』,『集合の点と点のつながりを表すのが近傍で，どういった近傍が使われているのかを考える』『どんなに細かいところでも，きちんと数学的に定義して，これは前提として使っていいのかどうか細心の注意をはらって考えていく』ということである．これを心構えをもって以下読んでいただきたい．これは，位相空間論を勉強することに限ったことではないが，とにかく，特に大学の数学で議論を進めていくときは，何を前提としていいのか，きちっと細かい定義を 1 つずつ確認しながら話を進めていこう．その心構えを気づかせてくれる科目の 1 つが位相空間論であると私は考える．

位相空間の定義というものは非常にわかりにくい．いまはいっていることは難しいかもしれないが，**位相空間論を勉強するには，大学の授業タイトル通り「集合と位相」の「集合論」から学び始めることが多い．そして 2 つの集合に対して点と点の写像を学習する．それから点と点の関係を結びつける近傍を定義して位相空間に変わり，2 つの位相空間で点の周りの仲間 (近傍) から点の周りの仲間 (近傍) への写像の学習に変わるという流れを体得・理解してほしい．**これらの内容は，p.305 の連続写像の節でそれなりに詳しく解説している．

そして，**一般の位相空間論の本と同様にたくさんの位相空間の言葉を定義し解説するよりも，言葉の定義の解説は少なくても，位相空間がどのようなものかにこだわって解説し，わかったというイメージと気持ちがもてるように解説したつもりである．**とにかく，この本の趣旨は，位相空間のアイデアとイメージ理解である．これさえできるようになれば，一般的な位相空間の本も，食いついて読めるようになるであろうと思っている．

2.11.1　いままでの議論 (位相空間論) で根本をなしたもの

p.117 以降の位相空間の解説で，根本をなしていたものは何だっただろうか．それは

「ε近傍」といわれる「近傍」

である．すべて，もう一度簡単にでもよいから，読み返してみると，あらゆる言葉の定義，たとえば，開集合，閉集合，内点，外点，境界点，触点，集積点，孤立点，閉包，相対的な考え，などなど，ε 近傍が必ず絡んでいるはずである．つまり，位相空間論を語るには,「近傍」抜きでは語れないということがわかるはずである．この本の最後に述べる連続性やコンパクト性も，近傍を集めて作った開集合を用いて定義されている．この本では，解説しないが連結の定義も開集合を用いて定義される．

前節までは，近傍の中で最もイメージしやすい一番簡単な ε 近傍を使って，いろいろ解説してきた．その ε 近傍も，距離を定義して，離散距離を導入した ε 近傍とユークリッドの距離と同値な距離での ε 近傍では，内点や外点などの位相的な性質が違ったことは述べた．つまり，同じ ε 近傍であっても，考える距離によって，位相的な性質が変わってくる．

つまり，位相空間を語るには近傍が必要不可欠だし，

位相空間の性質は近傍の作り方が決定づける

(ε 近傍では距離関数を考えないといけない) ということである．

よって，位相空間の議論には，近傍をせめて考えたらよさそうであることがわかる．この節では，距離関数を使って考えた ε 近傍ではなく，距離を使わない一般の近傍を定義して考えていく．そしてその近傍がどのようにいかされているか，近傍にこだわって解説しようと思う．

2.11.2　位相空間を学ぶにあたって

位相空間とは何かと聞かれたとき，それは私の場合，

位相空間とは，集合のすべての点に近傍が定義された集合である

と答える．もちろん，近傍というものを数学的にきちっと定義しないといけ

ない．

つまり，**位相を入れる (集合を位相空間に変える) というのは，集合の各点に近傍を考えること (近傍を定義すること) である**．手っ取り早くイメージでわくのは，今まで議論した，数直線 R において ε 近傍である．本来，順番としては，こうである．R は単なる**実数の集合**で (何も宣言しなければ単なる実数の集合で，距離を使って近傍など考えてはいけないのである)，$\forall x, y \in R$ に対して距離を定義する (距離関数を決める)．そして，距離関数が実数の集合 R に対して定義されると，ε 近傍という近傍を考えることができ，点と点のつながりが実数の集合 R に導入され，実数の集合 R が位相空間 R に変わったという流れである．近傍を定義しなければ，数直線 R は，ただ実数を視覚的に並べただけの，お互いの実数が何のつながりもない集合であって，何も宣言しなければ 2 点間の距離を考えてはいけないと考えるのである．これが，位相空間を学ぶ心構えの出発点となる．

本来ならば，数直線 R に対して近傍をまず定義して，R を位相空間に変え，位相空間の言葉などを議論していくものであるが，そんなこともせずに高校数学の学んだ範囲をいきなり使って，位相空間に関する内容をいろいろ考えてきた．だからいままでは**最初から位相空間ができあがっている R で，いろいろな言葉を定義してきたと考えた方がよいのである**．

私たちは，位相空間を学ぶまで当たり前のように，R や R^2 において，何の断りもせずに 2 点間のユークリッドの距離を考え，その距離を使って，ε 近傍を考えた．しかし，前節 2.10.1 で，距離関数 (距離空間) を定義した以上，**集合に**どういう距離が定義されていて (距離関数が定義されていて) とか，どういう種類の近傍を使ったらよいのかと考えながらこれからは読まないといけないとも述べた．

さらに重要なことは，最初から集合において，距離でのみしか近傍は考えられないと決めつけてはいけないのである．距離を入れて近傍を定義することが当たり前と思うかもしれないが，位相空間は最初から距離ありきで考えるのではない．これは，距離が入っていない位相空間も存在するからである．

初歩的な位相空間論の本は，ユークリッド空間のユークリッドの距離を

使って位相空間の言葉を説明することが多いが (この本もその流れに全く例外ではない．p.120 以降，距離関数も定義することなく，ユークリッドの距離を使って，しかもすでに位相空間ができあがっている状態で説明した)，これは一番位相空間の言葉のイメージがわきやすいから，いまのうちに位相空間論の言葉を理解しておこうという著者からのメッセージであると考えてもよい．はじめて位相空間を学ぶ学生が，抽象的な位相空間の定義を先に学んで，R に位相を入れてから，R を使って位相空間の言葉をたくさん定義されたところで，ぴんとくる人はかなり少ないと思う．ますます位相空間から遠のいていくに違いないといっても言い過ぎではない．

いままで学んだ過程をふりかえる

くどいようだが，もう 1 度いままでの解説を整理してみよう．先ほど近傍の重要性を説いたところであるが，この本では最初に p.120 の節 2.2 で，数直線 R を使って，位相空間論の基礎となる言葉をたくさん定義して解説してきた．ここでたとえばいきなり ε 近傍というものを定義したが，これは位相空間論としては順番が間違っている．どういうことかというと，数直線上である点からの距離 (絶対値を使った) を使って近傍を定義したのであるが，そもそも「距離」というものを定義していない (この集合には，この距離関数を使って，距離を定義して ε 近傍を定義するということを宣言していない)．いまから R において，ユークリッド距離を使って近傍を定義しますと宣言すれば，問題がないわけである．さらに細かいことをいえば，ε 近傍を定義したが，ε 近傍は数学の近傍の定義を満たしているのかということも議論しないといけない．軽々しく，近傍という言葉を用いてもよいのかということも疑わないといけないのである．

つまり，さらに詳しくいうと，ε 近傍を定義する前に，集合の点と点の仲間という意識を与える数学的な近傍の定義 (近傍の公理を決めないといけない) をまずしないといけない．そして，ε 近傍は，近傍の公理を満たすので，近傍という名前を使ってよいとするのである．話は何をいっているのかわからない人も多いだろうが，とりあえずそんなものかと思って以下読んでいってもらいたい．そんなこといわれても $\cdots$ と思っても，それが位相空間で

ある．

位相空間の復習と必要性

さて，いままで，位相空間という言葉をこの節以前に何回も使ってきた．

数直線の近傍を使って，開集合，閉集合や言葉の定義をいろいろみてきたが，数直線上の近傍や開集合の性質を，他の曲がった図形でも最低限譲れない条件として利用しようと考えたのが位相空間の考えであったことは先に述べたとおりである．S^1 における S^1 上の ε 近傍がその例で，開集合の性質を満たすとして，局所的に数直線と同じ性質として考えていくことができるようにした．距離空間は直線や平面以外にも円や球上のような曲がったところでも，R 上の距離と同じような性質をもつ距離を導入できるということである．

集合 X を X において考え，位相空間 X という概念に変わるとき (集合の各点に近傍が定義されたとき)，どういう性質が加わったのか復習してみよう，それは p.171 でも述べたように，

位相空間のイメージ

(1) $X^c = \varnothing$ である．

(2) X は開集合であり，閉集合である．

(3) X の任意の点で近傍をとることができる．つまり，X の任意の点は内点である．つまり，$X^i = X$ である．

となる．とにかく，各点に近傍が定義されている空間 (集合) だと思えばよい．そして極端なことをいえば，R や R^2 などのユークリッドの空間の特徴の一部をコピーした空間ともいえた (位相空間であればすべてユークリッド空間と同じ性質かといえば，実は，必ずしもそうではない．これは近傍の取り方による)．

そしてまたなぜ位相空間が必要か (学ぶ必要があるのか) というと，高校まで学んだ (または大学の最初の方で学ぶ集合論や写像) 集合だけでは，連続関数 (写像) や $\varepsilon - m$ 論法，つながっているかどうかの連結 (この本では解説しない)，コンパクト性など定義できないからである．これらの内容は，

開集合や近傍という言葉を使って定義されるから，近傍が定義された集合 (位相空間) でないと，議論・定義されないのである．

前置きが長くなりすぎた．それでは，位相空間という概念を与える近傍について，数学的に定義するとどうなるのか，まずは，位相空間の原子・細胞部分,「近傍」を数学的にきちっと定義・解説していきたい．

私はいろいろな，位相空間論の本を読んできたが，たいていの本が，位相空間を定義するときに，天下り的に開集合から抽象的に定義することが多い．開集合の後，近傍のことを解説されてもいまいちわかりにくい．しかもそういった本のほとんどは，ε 近傍という近傍を使って開集合を定義していることが多く，順番が逆という印象も与える．これは初心者にとって非常にわかりにくいし，イメージがわきにくいと，私自身の経験上からいえる (これは私だけかもしれないが $\cdots$)．

そこで私の場合，いままで解説したとおり位相空間の根本となるものは近傍という考えから，この本で位相空間を定義するとき，まず各点に近傍を定義して集合を位相空間に変え，それから，開集合や閉集合などを定義することにした．その方が流れがいいし，イメージがわきやすいと経験上思ったからである (実際に，ε 近傍という近傍を使って，開集合を定義した)．いままでの位相空間論の本と違った展開で位相空間論の解説を試みたいと考えている．私なりの小さな小さな挑戦である．近傍は，点と点の間のつながりの概念を表す (仲間の概念を表す)，位相空間の細胞だとも思っている．すべての位相空間の生命の基となるものは近傍である．まずその生命の基になる細胞，つまり近傍を数学的に定義しないと位相空間は生きないと思っている次第である．

2.12　近傍

近傍という言葉は，この本の中に何回も登場した．近傍といえば，真っ先に思いつくのがいままで解説してきた距離を使った ε 近傍であろう．この ε 近傍は，距離関数が使われて，点を中心とした近傍が定義され，点の周りの仲間という意味があった．ε 近傍は，非常に近傍という概念がイメージしや

すく，このおかげで近傍がイメージできている読者も多いのではないだろうか．しかも，近いというイメージまで与えてくれている．p.213 の節 2.11.2 でも述べたが，位相空間を考えるとき，まず集合にある距離関数を使うことを宣言してから，ε 近傍を考えるという流れの大前提を忘れてはいけない．近傍を考えるということは，集合の各元に仲間という考えを導入していくことと同じである．これは，p.199 の駅で距離空間を考え近傍を作っていた例 2.10.2 を思い出すとよい．最初はバラバラだった駅が，距離関数を入れることによって，ε 近傍が定義でき，各駅にある条件を満たす仲間ができる．また近傍は近いという言葉こそ使っているが，**近傍は近いというより，仲間という考えが大事であるとも述べた．**

このように，イメージしやすい近傍であればそれでよいのであるが，いざ一般的な近傍の公理をはじめて学んだとき，非常に抽象的であるから近傍というイメージが覆され，何をいっているのかわからないという経験をした人も多いのではないだろうか．後からあらためて一般の近傍の公理を解説するが，ε 近傍が災いして，どうしても一般の近傍とのギャップが大きすぎることがあるのである．つまり，全く似ているようで，そうでない部分が非常に多いのである．たとえば，次のような，先入観ができてしまっている人もいるのではないか．近傍は開集合である，近傍はある点から近い点の集合である (近いという意味を与えている) などである．これらの先入観ができてしまっていたら，まずはそれを払拭することから始めるとよい．近傍と開集合の違いがわからない人もいるのではないだろうか．

それなら，ε 近傍にもあり，一般の近傍にもある共通の性質とは何かと聞かれたら，**一番大事にしておく近傍の概念は，ある点を中心とした集合 (仲間) であり，ある点の周りが隙間なく埋まっていればよい，ある点の周りの存在が保証されている**と私の場合は説明するであろう．

近傍は，何回も解説したように，距離関数を使ってのみ考えるのではない．距離関数を使った ε 近傍は近傍全体の 1 種類でしかないということである．数直線 R にも，このような ε 近傍以外にもたくさんの近傍を定義できるということが大事である．集合の各元に仲間という概念を与えることが近傍なのである．たとえば，次のような状況を考えよう．

近傍という概念は，私たち一般生活に非常に密着している．たとえば，もし私たち日本人が，日本人の研究者がノーベル賞をもらったというニュースを聞いたらうれしくないだろうか，また日本人のスポーツ選手がオリンピックで金メダルを獲得したらうれしくないだろうか？これはどういう状況を表しているかというと，全く見ず知らずの会ったことのない日本人が立派なことを成し遂げると，急に親近感を感じるということである．つまり，親近感を感じるということは，自分とその人が気持ち的に一方的であっても近づいたということである．よく日本代表のサッカーの試合で，日本の代表選手がゴールをあげるとスポーツバーで抱き合うシーンをよく見るだろう．あれは親近感を感じ日本人という近傍の中に入ったことを意味する．これを数学の言葉で言い表すと，同じ近傍系にいるという表現になる．

このように，近いとか近づくという概念は，何も距離を考えなくても考えることができるのである．距離関数を使わなくても近傍が定義できる．つまり，近傍を一般化できるのである．近傍の一般化つまり，近傍の公理はとても難しい．

近傍を考えるときは，いままでみたいに距離関数を使って，ε 近傍を定義して，それから一般の近傍の定義をするというながれよりも，ε 近傍の考えを大切にしつつ，距離を入れないで近傍を定義していくという方が，一般の近傍の公理を説明しやすいと考える．それでは，近傍の公理を構築しながら，解説していくことにしよう．

2.12.1　近傍の公理を具体的に考えていく

まず近傍の意味を考えよう．国語辞典で意味を調べると「近辺・付近」というような近い意味が出てくる．つまり近い仲間という意味である．図 2-32 のような点に近い集合であればよいというわけでない．なぜなら，いままで述べたように，近いとかの概念は個人の主観であり客観性に乏しいからである．

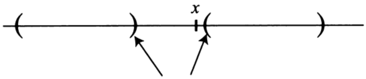


図 2-32　ある点 x に近いかどうかは客観的ではない

だからある点の近傍といえば，必ず自分を含んだ自分を中心にして考えた近い (？) 仲間 (集合) を考えると定義する．つまり，集合 U が x の近傍であるとき

$$x \in U \tag{2-37}$$

であることを条件とする．x の近傍 U を以下

$$U_x$$

とし，各点 $x \in X$ に定義された近傍の集合を

$$\mathfrak{N}(x)$$

と表すことにする。

ここではある集合に対して距離を使わないで近傍という概念を考えよう．

3 人の仲間の集合を

$$X = \{a, b, c\}$$

としよう．この X は 3 人の集合であって，集合の元のお互いの関係が定義されている訳ではない．ここで，自分を中心とした仲間 (近傍) を定義してみよう．$\{a, b\}$ を野球好きの仲間，$\{b, c\}$ をサッカー好きの仲間とする．これで，集合 X の各元に対して近傍 (の出発点) が定義された．つまり，a の近傍 (仲間) は $\{a, b\}$ で，b の近傍 (仲間) は $\{a, b\}$ と $\{b, c\}$ で (b にとってみれば，野球好きの a の近傍 (仲間) とサッカー好きの c の近傍 (仲間) を意識して各仲間 (近傍) ができている)，c の近傍 (仲間) は $\{b, c\}$ となる．集合 X にも近傍を定義するときは，このように特徴をつけて部分集合を考えていく．

大事なことは，集合 X の各元に対して近傍を定義していくということである．言い換えれば，ある点だけ近傍が定義されていないという状態をつくってはいけないということである．つまり，

$$\forall x \in X \text{ に対して}, \mathfrak{N}(x) \neq \varnothing \tag{2-38}$$

が条件になる．

ここでまた，数学的な近傍の定義を約束する．先ほど b の近傍 (仲間) は $\{a, b\}$ と $\{b, c\}$ と 2 つできたが，その共通部分

$$\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$$

も b の近傍と定義するのである．

つまり，

$$x \text{ の近傍 } U_x, V_x \text{に対して}, U_x \cap V_x \text{も } x \text{ の近傍である} \tag{2-39}$$

この場合，$\{b\}$ の意味は，野球も好きで，サッカーも好きな仲間は自分しかいないという意味である．この場合，近傍は自分一人しかいない場合もあるという意味も与えている (冒頭で近傍は近傍のとれる点で埋め尽くされていると述べたが，その 1 点に近傍の意味を与えていれば，1 点でも考えることができるということである)．

次に，周りの点がどのようなものか考えてみよう．私は近傍を，周りの点の存在が保証されている集合であるということを何度も述べてきた．数学的に周りの点とはどういうものであろうか．距離関数の定義された ε 近傍であれば，距離が～未満という非常に直感でわかりやすい周りをイメージできるが，いま考えているような集合には，距離という概念は全くない．数学的にはどのように周りの点の存在の保証をするかというと，もちろん ε 近傍にも当てはまるような周りの定義をしないといけないのであるが，数学的には次のようにする．

U_x が近傍になるには，x の周りの点は，近傍のとれる (近傍を考えることのできる) 点で埋め尽くされている

とする．そして，ここではその近傍のとれる点の集合を W_x とかくことにしよう．とにかく，x を中心とする仲間を作ったとき，どんなに小さくてもいいから，近傍のとれる (近傍を考えることのできる) 点で埋め尽くされていればよい (図 2-33 参照)．

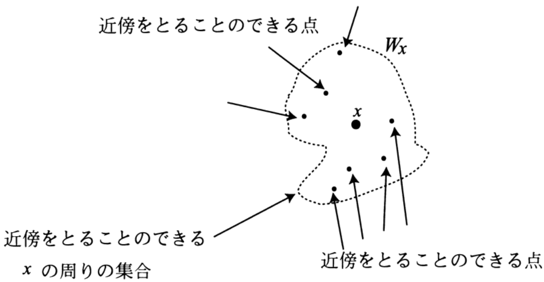


図 2-33　ある点 x の周りの様子

となると，大事なことは W_x はもちろん近傍のとれる点の集合であるから，W_x は x の近傍である．そして，U_x が近傍になるには，そんな x を含む部分集合 W_x を含むということである．

これを，記号を使って表すと，

x のどんな (任意の) 近傍 U_xも，次のような x の 1 つの近傍 W_xを含んでいる．W_xの任意の点は，近傍のとれる (近傍を考えることのできる) 点の集合である．　(2-40)

となる．

「近傍のとれる (近傍を考えることのできる)」とはどういう意味か解説しよう．一番わかりやすい例は，集合に距離関数を入れて考えているときの，ε 近傍 $B_\varepsilon(x)$ である．つまり，W_x の任意の点 y で，ε 近傍 $B_\varepsilon(y)$ が

$B_\varepsilon(y) \subset W_x$ とできるようにとれる集合といえばイメージできるであろう．さらに，W_x について，これについては後ほど解説するが，ここでも簡単に説明をしておこう．W_x は任意の点で近傍をとることができる集合なので，**開集合**なのである．開集合の定義は，p.241 でもきちっと解説する．特に開集合の近傍を x の**開近傍**という．つまり，**x の開近傍を含む集合はすべて，x の近傍となる**ということをいっているのである．

$$U_x が x の近傍 \iff x の開近傍 (x を含む開集合) \subset U_x \tag{2-41}$$

ともいえる．

逆にいえば，U_x が x の近傍であっても，任意の点で近傍のとれる (近傍を考えることのできる) 点である必要がないのである (図 2-34 参照)．

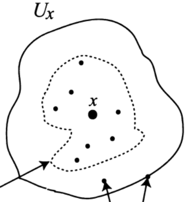


図 **2-34**　x の近傍 U_x について

つまり，図 2-34 をみてもわかるように，**近傍 U_x は開集合とは限らないということである**．つまり，近傍とは x の周りが近傍のとれる (近傍を考えることのできる) 点で埋め尽くされていればよいので，X の部分集合 A をかってにとってきたとき，

$$x の近傍 U_x に対して, U_x \subset A が成り立つとき, A は x の近傍である \tag{2-42}$$

ということがいえる．この意味は，U_x は x の近傍であるから，開近傍 $x \in W_x$ を含んでいるので，つまり，

$$x \in W_x \subset U_x \subset A$$

が成り立っているので，A は x の近傍ということができる．これは，近傍の大事な性質である．これは，A が開集合でなくてもよいことをいっている．

それでは，近傍の性質式 (2-40) と (2-42) を使って，先ほどの野球，サッカー好きで定義した近傍を用いて，さらに近傍の確認と拡張をしよう．

a の近傍は $\{a, b\}$ であった．(2-40) について確認する．つまり，$U_a = \{a, b\}$ の任意の点 (人)a, b で，$U_a = \{a, b\}$ に含まれるような，a の近傍と b の近傍が存在するかということである．$U_a = \{a, b\}$ において b の近傍を考えることができるかというと，

$$b \text{ の近傍} : \{b\} \text{ または } \{b, a\} \subset \{a, b\}$$

となり b の近傍を考えることができる．もちろん a についても，

$$a \text{ の近傍} : \{a, b\} \subset \{a, b\}$$

がいえるので，a の近傍 $U_a = \{a, b\}$ において，任意の点 a と b で近傍を考えることができていることがいえた．つまり，式 (2-40) でいう W_a は，$W_a = \{a, b\}$ で，この場合，$U_a = W_a = \{a, b\}$ である．つまり，$U_a = \{a, b\}$ は a の開近傍である．

次に，(2-42) について考える．$X = \{a, b, c\}$ の部分集合 $\{a, b, c\}$ であるが，

$$a \text{ の (開) 近傍} : \{a, b\} \subset \{a, b, c\}$$

が成り立っているので，$\{a, b, c\}$ も a の近傍となる．

ちなみに，$\{a, b, c\}$ で (2-40) について確認するために，各点 a, b, c について，近傍がとれるか調べてみると，

$$\begin{aligned} a \text{ の近傍} &: \{a, b\} \subset \{a, b, c\} \\ b \text{ の近傍} &: \{b\} \text{ または } \{b, a\} \subset \{a, b, c\} \\ c \text{ の近傍} &: \{c, b\} \subset \{a, b, c\} \end{aligned}$$

となり，$\{a, b, c\}$ の任意の点で近傍をとる (考える) ことができているので，開近傍である．つまり，$U_a = W_a = \{a, b, c\}$ ということである．以上まと

めると，a の近傍は，$\{a, b\}, \{a, b, c\}$ の 2 つであり，しかも両方とも開近傍となる．

また同様にして，b の近傍 $U_b = \{b\}$ も，$\{b\} \subset \{b\}$ が成り立つので $U_b = W_b = \{b\}$ であり開近傍である，c の近傍 $U_c = \{c, b\}$ も同様に $U_c = W_c = \{c, b\}$ であり開近傍であることに注意して，b，c の近傍となる集合を考えると，(2-42 を利用して)

$$
\begin{aligned}
b \text{ の (開) 近傍} : \{b\}, \{b, a\}, \{b, c\} &\subset \{a, b, c\} \\
c \text{ の (開) 近傍} : \{c, b\} &\subset \{a, b, c\}
\end{aligned}
$$

が成り立つので，$\{a, b, c\}$ は b の近傍でもあり，c の近傍でもある．

以上，各点 (人) の近傍をまとめると，

$$a \text{ の近傍}: \{a, b\}, \{a, b, c\} \tag{2-43}$$

$$b \text{ の近傍}: \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \tag{2-44}$$

$$c \text{ の近傍}: \{b, c\}, \{a, b, c\} \tag{2-45}$$

となる．これをみてもわかるように，**各点 (各人) に対して，近傍の種類や個数は違う (というより，違うように各点に近傍を定義できるということである)** ということである．

ここで，各点の開近傍となっている $\{a, b, c\}$ の意味を考えてみると，a からみれば，野球好きの b もいるし，野球に興味のない c もいる．c にしてみれば，サッカー好きの b もいるし，サッカーに興味のない a もいる．ただいえることは，それぞれの人について気の合う仲間が**全員**必ずいる (近傍がある) という意味である．それが開近傍である．そしてまた，a の近傍として考えた場合 $U_a = \{a, b, c\}$ は b の近傍にもなっているし (b の仲間がいるし)，c の近傍にもなっている (c の仲間がいる) ということがいえる．この開近傍に対してこういった表現で表せるということが非常に大事である．

くどいようであるが，もう一度 b の近傍 $\{b\}$(1 点のみの近傍) について説明しよう．b の近傍 $\{b\}$ のここでの意味は，野球もサッカーも好きな人という仲間 b のみであるということである．$\{b\}$ の任意の点は b しか考えることができなく，この場合 b の近傍 $\{b\}\subset \{b\}$ となり，b の任意の点で近傍を考え

ることができるということができる．つまり，式 (2-40) を満たしていると考える．ということは，**集合に対して，仲間がいない 1 点の近傍を考えることができるということである．**この場合，周りの存在が保証されているということは，最初イメージすることは難しい．だから，最初 ε 近傍から近傍を定義すると，日常の周りというイメージが先行して (自分を中心とする同じ考えの仲間が必ずいる)，1 点だけの近傍のイメージがなかなかわかないものである (これは個人的な経験であるが $\cdots$)．

また，式 (2-42) からわかるように，**各点の近傍を含む集合はすべてその点の近傍になるので，誰も仲間をもたないような 1 点の近傍を作って定義すると，その 1 点を含む部分集合はすべてその点の近傍になるということである．**これを「離散位相」といい，p.236 で詳しく述べている．

さてこれら近傍を数学の記号を使って表そう．各 $x \in X$ に定義された近傍の集合を

$$\mathfrak{N}(x)$$

で表したので．つまり，(2-43)，(2-44)，(2-45) は

$$\{a,\, b\},\, \{a,\, b,\, c\} \in \mathfrak{N}(a) \tag{2-46}$$

$$\{b\},\, \{a,\, b\},\, \{b,\, c\},\, \{a,\, b,\, c\} \in \mathfrak{N}(b) \tag{2-47}$$

$$\{b,\, c\},\, \{a,\, b,\, c\} \in \mathfrak{N}(c) \tag{2-48}$$

ということである．ここで気づいてほしいのは，$X = \{a,\, b,\, c\}$ の各点の近傍には必ず $X = \{a,\, b,\, c\}$ が含まれているということである．

このように，近傍を定義することによって，距離でみないで，一般化された近さ，すなわち近傍の概念が集合にも導入されたわけである．

2.12.2　近傍の公理

それでは，いままで近傍を作っていく過程で得た近傍の約束 (2-37)，(2-38)，(2-39)，(2-40)，(2-42) を数学の記号を使って並べてみよう．一般の数学書に掲載されている近傍の公理の表現を使った．

近傍の公理

集合 X の各点 $x \in X$ で定義された，x に関する X の部分集合族を $\mathfrak{N}(x)$ で表すことにする．この $\mathfrak{N}(x)$ が，次の (1)〜(5) を満たすように定義されているとき，$\mathfrak{N}(x)$ を x の近傍系という．

(1) $\forall x \in X$ に対して, $\mathfrak{N}(x) \neq \varnothing$

(2) $U_x \in \mathfrak{N}(x) \quad \to \quad x \in U_x$

(3) $U_x, V_x \in \mathfrak{N}(x)$ に対して，$U_x \cap V_x \in \mathfrak{N}(x)$

(4) $U_x \in \mathfrak{N}(x)$ に対して，$U_x \subset A$ ならば，$A \in \mathfrak{N}(x)$

(5) $\forall U_x \in \mathfrak{N}(x)$ は，次のような $W_x \in \mathfrak{N}(x)$ を含んでいる (つまり，$W_x \subset U_x$)．$\forall w \in W_x$ に対して，$U_x \in \mathfrak{N}(w)$

これらを近傍の公理という．まず，**近傍の公理そのものに，開集合や閉集合という概念はないことに注意しておこう．**

そして，部分集合 X の**任意の (すべての)** 点に近傍の公理を満たす部分集合族が定義されたとき，集合 X は**位相空間**という．特に，近傍を定義して作った位相空間を**近傍空間**ともいう．位相空間がどういうものだったか思い出してほしい．これは p.216 でまとめて述べたが，X は開集合であり，閉集合であった．任意の点で近傍がとれる点の集合を開集合といったので，近傍が X の任意の点で定義されると，X は開集合となるということを，暗黙のうちにいっているようなものである (これについては後で述べる)．つまり，

$$X \text{ の任意の点で近傍系を定義} \quad \Longleftrightarrow \quad X \text{ は開集合であり閉集合}$$

という同値関係が自然と成り立つのである．以下，近傍空間という言葉は使わず，位相空間という言葉を使っていくことにする．

それでは，近傍の公理といわれる条件で難しいところを 1 つずつ解説していこう．

近傍の公理 (2) は，U_x は x を含むものと定義したのではないかと最初は思うかもしれないが，そうではなく「$\mathfrak{N}(x)$ は x に関係のある集合族である，もし $\mathfrak{N}(x)$ に含まれる x に関係する集合 U_x をとったとき，もし U_x が x の近傍になるには，それは x を含んでいる」という意味である．

近傍の公理 (3) と (4) は，いままで近傍を作ってきた具体例でイメージがわくであろう．問題は近傍の公理 (5) である．近傍の公理 (5) は，最初見たとき意味がわからないであろう．(5) は近傍の公理の中でも，周りの点の保証した公理，周りの点とはどういうものかを解説した公理で，一番大事な部分で (というよりすべて大事であるが) ある．これがきちんと理解できておかないといけない．まず，(5) の意味を解説すると,『x のどんな近傍 U_x も次のような 1 つの x の近傍 W_x を含んでいる．U_x は W_x のあらゆる点の 1 つの近傍である』となる．これは，私がいままで使ってきた表現と少し異なっていることに注意しよう．私はこの W_x について,「W_x の任意の点で近傍を考えることのできる点の集合」と述べてきた．しかし，ここでは,「U_x は W_x の任意の点の近傍である．つまり **W_x の任意の点は，U_x を近傍にもつ点の集合である**」ということである．違いがわかるであろうか．私がいままで述べてきた，任意の点で近傍を考えることのできる点の集合というのには，どの近傍になっているのかの点の集合かはっきりしていなかった．その違いである．

くどくど説明するよりも，具体例で示した方がわかりやすい．先ほどの野球好き，サッカー好きで作った近傍で解説しよう．もう一度 p.226 の式 (2-46)，(2-47)，(2-48) の各点の近傍で確認すると，たとえば，a の近傍は $\{a, b\}, \{a, b, c\}$ であった．ここでたとえば，$U_a = \{a, b\}$，$W_a = \{a, b\}$ とすれば，$W_a = \{a, b\}$ の任意の点 (人)a, b において，

$$U_a = \{a, b\} \in \mathfrak{N}(a), U_a = \{a, b\} \in \mathfrak{N}(b)$$

と $U_a = \{a, b\}$ は a の近傍はもちろんのこと，b の近傍にもなっているという意味である．つまり，$W_a = \{a, b\}$ の任意の点 a, b は近傍 $U_a = \{a, b\}$ をもつ点の集合といえる．

同様に，$U_a = \{a, b, c\}$，$W_a = \{a, b\}$ とすれば，$W_a = \{a, b\}$ の任意の点 (人)a, b において，

$$U_a = \{a, b, c\} \in \mathfrak{N}(a), U_a = \{a, b, c\} \in \mathfrak{N}(b)$$

でもあるので，$W_a = \{a, b\}$ の任意の点 a, b は近傍 $U_a = \{a, b, c\}$ をもつ点の集合といえる．また $W_a = \{a, b, c\}$ とすれば，$W_a = \{a, b, c\}$ の任意の点

(人)a, b, c において，

$$U_a = \{a, b, c\} \in \mathfrak{N}(a), U_a = \{a, b, c\} \in \mathfrak{N}(b), U_a = \{a, b, c\} \in \mathfrak{N}(c)$$

というように，$U_a = \{a, b, c\}$ は，a の近傍はもちろんのこと，b や c の近傍にもなっているいう意味である．つまり，$W_a = \{a, b, c\}$ の任意の点 a, b, c は近傍 $U_a = \{a, b, c\}$ をもつ点の集合といえる．そんな，$U_a = \{a, b, c\}$ の部分集合 (開近傍)$W_a = \{a, b\}$ や $W_a = \{a, b, c\}$ がとれるということである．

さてもう一度述べるが，私は p.222 以降の近傍の公理 (5) についての説明で，x の近傍 U_x の部分集合かつ x の近傍である W_x について，W_x の任意の点で U_x に含まれるような近傍がとれる点の集合といういい方をしてきた．つまり，$U_a = \{a, b, c\}, W_a = \{a, b, c\}$ としたときに，$\forall a, b, c \in W_a$ に対して，a の近傍 $\subset U_a$，b の近傍 $\subset U_a$，c の近傍 $\subset U_a$ となるように a の周りの点を保証した．こうして作った a の近傍は，$U_a \in \mathfrak{N}(a)$，$U_a \in \mathfrak{N}(b)$，$U_a \in \mathfrak{N}(c)$ というようになっていたということである．つまり，U_a は，a の近傍のみならず，b や c の近傍にもなっているということである．また，任意の点で近傍がとれる (その点の近傍を含むことができる) ということで，これを開近傍という言葉を使った (図 2-35 参照)．

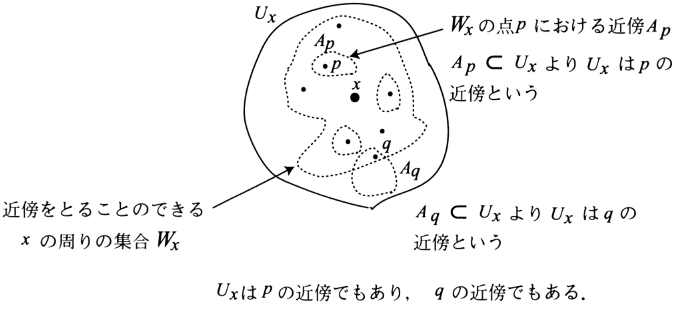


図 2-35　x の近傍 U_x について，x の周りの様子

つまり，$p_1, p_2, p_3, \cdots \in W_x$ に対して，U_x は，それぞれの点の近傍

$A_{p_1}, A_{p_2}, A_{p_3}, \cdots,$ をとると，$A_{p_1} \subset U_x, A_{p_2} \subset U_x, A_{p_3} \subset U_x, \cdots,$ とできるということである．そんな近傍 $A_{p_1}, A_{p_2}, A_{p_3}, \cdots,$ が存在するということである．

逆にいうと，ある集合がその点の近傍を含めば，その点の近傍ということであるから，

> x の近傍 U_x が，$p(\in U_x)$ のある近傍 A_p を含むとき，U_x は p の近傍であるといういい方をする

ということである．この場合，A_p は別に開近傍でなくてもよい．1 つでも，$A_p \subset U_x$ となる近傍がとれればよい．なぜなら，1 つの A_p が p の近傍ということは，A_p には少なくとも 1 つ W_p にあたる開近傍を含んでいるからである．

よって，このとき (たとえば p.226 の式 (2-46)，(2-47)，(2-48) の例で考えてきたように)，

$$A_{p_1}, A_{p_2}, A_{p_3}, \cdots \subset U_x,$$

$$\Updownarrow$$

$$U_x \in \mathfrak{N}(p_1), U_x \in \mathfrak{N}(p_2), U_x \in \mathfrak{N}(p_3), \cdots$$

が成り立っているという意味であり，これを言葉で表すと，
U_x は $p_1, p_2, p_3, \cdots \in W_x$ の近傍である，つまり，$\forall p \in W_x$ の近傍であるといういい方にできるということである．また，各点の近傍系 $\mathfrak{N}(p_1)$, $\mathfrak{N}(p_2), \mathfrak{N}(p_3), \cdots$ は，近傍 U_x を元にもっているということもいえる．

これについては，距離空間で考えた場合，ε 近傍は開集合 (開近傍) であるので，ある点 $\exists p \in U$ に対して，

$$\varepsilon\text{近傍 } B_\varepsilon(p) \subset U \text{ ならば}, U \text{ は } p \text{ の近傍である}$$

といういい方をすることができるし，特に，$\forall p \in U$ に対して，

$$\varepsilon\text{近傍 } B_\varepsilon(p) \subset U \text{ ならば}, U \text{ は } p \text{ の}\textbf{開近傍}\text{である}$$

といういい方ができるということである．

以上の説明より，いまは次のように理解しておけばよいであろう．近傍の公理 (4) をみてもわかるように，ある点の近傍を含む部分集合は，その点の近傍になると約束している．つまり近傍がとれる点ということは，それを含んでいる部分集合はその点の近傍にもなるといっているのである．これはイメージ図 2-35 を参考にしながら理解するのが一番よいと思う．

以上のように，どの近傍になるのかということをはっきりさせることが大事で，そうなるためにはどういう条件が必要か考えておく必要がある．何度も述べたが，いままでは，近傍のとれる点の集合ということで W_x を考えてきたが，近傍がとれるというのは，どの近傍になっているのかはっきりさせることができるということである．

これらの近傍の公理を見てもわかるように，全く近いというようなイメージがわかない．むしろ点の仲間を数学的に約束したものである．というより，一般の位相空間論では，こういう近傍の公理がいきなり定義されても全くイメージがわかないというのが普通であろう．公理とは，議論を始めるための出発点となる主張で，明らかに真であると思われるものを出発点として考えるものである．私たちも，公理をたくさん？みてきたが，たとえば，実数のデデキントの切断公理など少しでも数学ができる人であれば，これを出発点として大前提として考えるんだなということは納得できるものも多い．距離空間の公理もなんとなく出発点としてはわかる．しかし，近傍の公理をみたときは，ほとんどの人が，何がいいたいのかわからないし，何が明らかで真で，何の特徴を出発点として考えているのか全くわからない人が多いのではないだろうかと私は考えてしまうのである．

コメント

近傍の公理 (5) で，W_x にあたるものを開近傍という言葉を使って，私は説明した．それなら，近傍の公理 (5) で，$x \in W_x \subset U_x$ となる開近傍 W_x が存在するという表し方で，近傍の公理 (5) を表した方がわかりやすいのではないかと思う読者もいるはずである．どうしてこのようなイメージしやすい表し方で定義しないかというと，これは 100 %勝手な私

見であるが，近傍の公理を定義するのに，まず近傍という言葉は定義で条件の中で使えないし，この段階では,「開」という定義もしていないからだという理由からだと思われる．だから，開近傍の特徴を近傍や開という言葉を使わないで表現したら近傍の公理 (5) のようになるということであると考えている．

そこで，もう少し元の多い集合で近傍の公理を考え理解を深めようと思う．

元が 5 つの集合で近傍をつくる

5 人の仲間の集合を

$$X = \{a, b, c, d, e\}$$

とする．これは単に人間の集合でお互いの関係がない．ここで次のような仲間という近傍の概念を与える．$\{a, b\}$ は野球が好きという近傍 (仲間)，$\{b, c, d\}$ はサッカーが好きという近傍 (仲間)，$\{e\}$ は剣道が好きという近傍 (仲間) を最初に与える．つまり，最初に定義された a の近傍は $\{a, b\}$，b の近傍は $\{a, b\}$ と $\{b, c, d\}$，c の近傍は $\{b, c, d\}$，d の近傍は $\{b, c, d\}$，e の近傍は $\{e\}$ となる．

たとえば，近傍の公理 (3) より，$\{a, b\} \cap \{b, c, d\} = \{b\}$(野球もサッカーも好きな仲間) という近傍も新たに考えないといけないし，近傍の公理 (4) より近傍を含む X の部分集合はすべてその人の近傍になるので，たとえば $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$ が成り立つから，$\{a, b, c\}$(a と話の合う野球好きは全員保証されていて，サッカー好きも何人かいるという近傍．とにかく a の近傍であるから a と話の合う野球好き全員が保証されていればよい．この $\{a, b\}$ は近傍の公理 (5) の W_a にあたる) も a の近傍となることに注意して，各人の近傍をかきだすと，次のようになる．

$$
\begin{aligned}
a \text{ の近傍系 } \mathfrak{N}(a) \ni\ & \underline{\{a,\, b\}},\ \{a,\, b,\, c\},\ \{a,\, b,\, d\}, \underline{\{a,\, b,\, e\}} \\
& \underline{\{a,\, b,\, c,\, d\}},\ \{a,\, b,\, c,\, e\},\ \{a,\, b,\, d,\, e\}, \underline{\{a,\, b,\, c,\, d,\, e\}} \\
b \text{ の近傍系 } \mathfrak{N}(b) \ni\ & \underline{\{b\}}, \underline{\{a,\, b\}},\ \{b,\, c\},\ \{b,\, d\}, \underline{\{b,\, e\}}, \\
& \{a,\, b,\, c\},\ \{a,\, b,\, d\}, \underline{\{a,\, b,\, e\}}, \underline{\{b,\, c,\, d\}} \\
& \{b,\, c,\, e\},\ \{b,\, d,\, e\}, \underline{\{a,\, b,\, c,\, d\}},\ \{a,\, b,\, c,\, e\},\ \{b,\, c,\, d,\, e\} \\
& \{a,\, b,\, d,\, e\}, \underline{\{a,\, b,\, c,\, d,\, e\}} \\
c \text{ の近傍系 } \mathfrak{N}(c) \ni\ & \underline{\{b,\, c,\, d\}}, \underline{\{a,\, b,\, c,\, d\}},\ \{b,\, c,\, d,\, e\}, \underline{\{a,\, b,\, c,\, d,\, e\}} \\
d \text{ の近傍系 } \mathfrak{N}(d) \ni\ & \underline{\{b,\, c,\, d\}}, \underline{\{a,\, b,\, c,\, d\}},\ \{b,\, c,\, d,\, e\}, \underline{\{a,\, b,\, c,\, d,\, e\}} \\
e \text{ の近傍系 } \mathfrak{N}(e) \ni\ & \underline{\{e\}},\ \{a,\, e\}, \underline{\{b,\, e\}},\ \{c,\, e\},\ \{d,\, e\}, \\
& \underline{\{a,\, b,\, e\}},\ \{b,\, c,\, e\},\ \{a,\, c,\, e\},\ \{b,\, d,\, e\} \\
& \{c,\, d,\, e\},\ \{a,\, d,\, e\},\ \{a,\, b,\, c,\, e\},\ \{a,\, c,\, d,\, e\}, \underline{\{b,\, c,\, d,\, e\}} \\
& \{a,\, b,\, d,\, e\}, \underline{\{a,\, b,\, c,\, d,\, e\}}
\end{aligned}
$$

大事なことは，人によって近傍の種類と個数が違うことである．また下線を引いている近傍は，どの人間をとっても必ず 1 つはその人の近傍を含んでいるという**開近傍**である (つまり，近傍の公理 (5) で $U_x = W_x$ として考えることができる近傍である)．これについて説明しよう．

たとえば，$\{a, b, e\}$ は，点 a, b, e について，近傍がとれるか調べてみると，

$$
\begin{aligned}
a \text{ の近傍} : \{a,\, b\} &\subset \{a,\, b,\, e\} \\
b \text{ の近傍} : \{b\} \text{ または } \{b, a\} &\subset \{a,\, b,\, e\} \\
e \text{ の近傍} : \{e\} &\subset \{a,\, b,\, e\}
\end{aligned}
$$

となり，$\{a,\, b,\, e\}$ の任意の点で近傍をとる (考える) ことができているので，開近傍である．そして次のようにいうことができる．

つまり，$\{a,\, b,\, e\}$ を a の近傍 $U_a = \{a,\, b,\, e\}$ として考えた場合，

$$
\begin{aligned}
U_a &= \{a,\, b,\, e\} \in \mathfrak{N}(a) \\
U_a &= \{a,\, b,\, e\} \in \mathfrak{N}(b) \\
U_a &= \{a,\, b,\, e\} \in \mathfrak{N}(e)
\end{aligned}
$$

となっているので，a の近傍 $U_a = \{a,\, b,\, e\}$ は，a の近傍はもちろんのこと，b や e の近傍にもなっていることをいっている．ちなみに近傍の公理 (5) にあてはめて考えると，$U_a = W_a = \{a,\, b,\, e\}$ ということである．

a の近傍 $U_a = \{a,\, b,\, c\}$ は，c のいかなる近傍も含まれていない．つまり，

$$c\text{の近傍} : \{b,\, c,\, d\},\, \{a,\, b,\, c,\, d\},\, \{b,\, c,\, d,\, e\},\, \{a,\, b,\, c,\, d,\, e\} \notin U_a = \{a,\, b,\, c\}$$

である．これを言い換えると，$U_a = \{a,\, b,\, c\}$ は c の近傍ではないといういいかたになるし，実際，

$$U_a = \{a,\, b,\, c\} \notin \mathfrak{N}(c)$$

となっている．実際に，$\mathfrak{N}(c)$ に，$\{a,\, b,\, c\}$ はふくまれていない．つまり，$U_a = \{a,\, b,\, c\}$ は開近傍ではない．

近傍の公理は，a の近傍 $U_a = \{a,\, b,\, c\}$ の任意の点で近傍がとれる必要がなく，U_a の部分集合で a の近傍である W_a の任意の点で近傍がとれればよいことを，近傍の公理 (5) で保証しているということである．つまり，この場合，$U_a = \{a,\, b,\, c\}$, $W_a = \{a,\, b\}$ で，たしかに $W_a = \{a,\, b\}$ の任意の点 a, b において，

$$a\text{の (開) 近傍} : \{a,\, b\} \subset \{a,\, b,\, c\}$$
$$b\text{の (開) 近傍} : \{b\},\, \{a,\, b\} \subset \{a,\, b,\, c\}$$

となっているので，$U_a = \{a,\, b,\, c\}$ の 2 点 a, b で近傍がとれるということである．

つまり，

$$U_a = \{a,\, b,\, c\} \in \mathfrak{N}(a)$$
$$U_a = \{a,\, b,\, c\} \in \mathfrak{N}(b)$$

で，$U_a = \{a,\, b,\, c\}$ は，a の近傍でもあり，b の近傍でもあるということである．そんな $W_a = \{a,\, b\}$ が存在するということである (もちろん c の近傍ではない)．とにかく近傍は，話の合う仲間を含んでいれば近傍となる．

ついでに次のような特別な？密着位相と離散位相を考えよう．

密着位相

3 人の仲間の集合 X を

$$X = \{a,\, b,\, c\}$$

とおく．この集合は個人の単なる集まりであって，お互いがつながりはない．ここで仲間という近傍の概念を与える．3 人とも山登りが好きという仲間 (近傍) の概念を与える．つまり，

$$a \text{ の近傍:}\{a,\, b,\, c\}$$
$$b \text{ の近傍:}\{a,\, b,\, c\}$$
$$c \text{ の近傍:}\{a,\, b,\, c\}$$

という近傍のみを考える．こうして定義した近傍は，近傍の公理を満たし位相空間となることを証明しよう．

まず，集合 X の各 a, b, c に近傍が定義されているので，
$\mathfrak{N}(a) \neq \varnothing, \mathfrak{N}(b) \neq \varnothing, \mathfrak{N}(c) \neq \varnothing$ であるので (1) を満たしている．つぎに，ここでは a についてのみ考えよう．a の近傍 $\{a,\, b,\, c\}$ は，$a \in \{a,\, b,\, c\}$ であるので近傍の公理 (2) を満たしている．近傍の公理 (3)，(4) は近傍が 1 つしかないので明らかに成り立ち，また，近傍の公理 (5) について考えると，a の近傍 $U_a = \{a,\, b,\, c\}$, $W_a = \{a,\, b,\, c\}$ として，W_a の任意の点 a, b, c について，

$$U_a = \{a,\, b,\, c\} \in \mathfrak{N}(a)$$
$$U_a = \{a,\, b,\, c\} \in \mathfrak{N}(b)$$
$$U_a = \{a,\, b,\, c\} \in \mathfrak{N}(c)$$

となっているので (つまり，$U_a = \{a,\, b,\, c\}$ が $\mathfrak{N}(a)$，$\mathfrak{N}(b)$，$\mathfrak{N}(c)$ の元になっている)，a の近傍 $U_a = \{a,\, b,\, c\}$ は b の近傍でもあり，c の近傍でもある．そんな a の近傍 W_a が存在するということがいえ，しかも b と c についても同じようにして近傍の公理を満たすことが証明できるので，こうして定義した近傍は近傍の公理を満たすのである．

こうして，3 人とも山登りが好きという近傍は，各 a，b，c とも他 2 名を，お互い少しでも話の合わない仲間はいなく，同じ山登りが好きな仲間と認識する概念を与えているから，こういう位相空間を**密着位相**という．

離散位相

3 人の仲間の集合 X を

$$X = \{a, b, c\}$$

とおく．ここで次のような仲間という近傍の概念を与える．a は陸上が好きという近傍 $\{a\}$，b は水泳が好きという近傍 $\{b\}$，c は勉強が好きという近傍 $\{c\}$ を最初に与える．つまり，話の合う仲間がいないという概念を最初に与えるのである．すると，近傍の公理 (4) より，たとえば a について考えると，X の部分集合で，$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}$ はすべて a の近傍となる．同様にして，b, c の近傍を考えると，各個人の近傍は

$$a \text{ の近傍:} \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}$$
$$b \text{ の近傍:} \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$
$$c \text{ の近傍:} \{c\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}$$

となる．こうして定義した近傍は，近傍の公理を満たし位相空間となることを証明しよう．まず，集合 X の各 a, b, c に近傍が定義されているので，$\mathfrak{N}(a) \neq \varnothing, \mathfrak{N}(b) \neq \varnothing, \mathfrak{N}(c) \neq \varnothing$ であるので (1) を満たしている．つぎに，ここでは a についてのみ考えよう．a の近傍 $\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}$ は，$a \in \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}$ であるので (2) を満たしている．次に (5) について考えるが，W_a として，$\{a\}$ は $W_a = \{a\}$，$\{a, b\}$ は $W_a = \{a\}$ または $\{a, b\}$，$\{a, c\}$ は $W_a = \{a\}$ または $\{a, c\}$，$\{a, b, c\}$ は $W_a = \{a\}$ または $\{a, b\}$ または $\{a, c\}$ または $\{a, b, c\}$ として考えると (5) を満たしている．

つまり，たとえば $U_a = \{a, b, c\}$，$W_a = \{a, b\}$ として，W_a の任意の点 a, b について

$$U_a = \{a, b, c\} \in \mathfrak{N}(a)$$
$$U_a = \{a, b, c\} \in \mathfrak{N}(b)$$

となっているので，$U_a = \{a, b, c\}$ は a の近傍はもちろんのこと，b の近傍にもなっている．そんな a の近傍 $W_a = \{a, b\}$ がとれるということである．もちろん，先ほども述べたように，$W_a = \{a, b, c\}$ などともしてよい．このような作業を各近傍について確かめていくと，すべての近傍について，近傍の公理 (5) を満たすことがわかる．また b と c の近傍についても同じようにして近傍の公理を満たすことが証明できるので，こうして定義した近傍は近傍の公理を満たすのである．

こうして，3 人とも誰とも話の合わない 1 人だけの近傍をもっているので (またはどの近傍を考えてもバラバラの話の合わないひとりぼっちの近傍がとれるということで)，これをバラバラで離れているという意味で，こうして導入された位相空間 (近傍空間) を**離散位相**という．

次に，近傍の公理 (5) の W_x について，深く考察してみよう．

2.12.3　開核，内点

近傍の公理 (5) のこの W_x は x に十分近い点の集合で (もちろん近いというのは主観である)，U_x は W_x の任意の点の近傍でもあった．そして，私はこの W_x のことを開近傍という言葉を使って説明した．

ここで，今度は逆に x の近傍 U_x で，U_x が近傍となる点の集合を考えることにする．これは，開集合という概念につながるものである．

位相空間 X では任意の点 x で，X の部分集合からなる近傍系を決定していた．一方，X の部分集合 A が与えられたとき，A が近傍となっている (A を近傍にもつ) ような点の集合を考えることができる．そのような，点すべてからなる集合を A の**内核**，または**開核**といい，

$$\mathrm{Int}A \quad \text{または}, A^i$$

で表す (p.169 では A^i を用いたが，以降，特に理由がないが $\mathrm{Int}A$ を用いることにする)．そして，$\mathrm{Int}A$ に属する点を A の**内点**という．これで，先ほど近傍の公理 (5) で述べた，どの点の近傍になっているかを表す集合を記号で表すことができた．

Int$A$ は，同じ近傍をもつ点を横断的につなげるものであると考えてよい(図 2-36 参照).

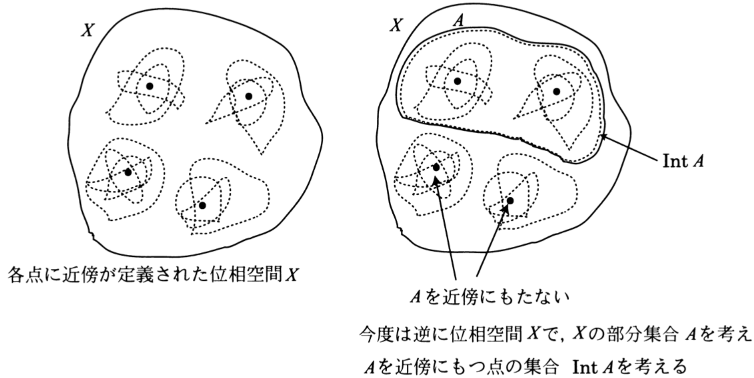


図 2-36　Int$A$ のイメージ

Int$A$ には次のような性質がある.

開核の性質

(1) $\mathrm{Int}A \subset A$

(2) $A \subset B \subset X \rightarrow \mathrm{Int}A \subset \mathrm{Int}B$

(3) $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}A) = \mathrm{Int}A$，つまり，Int$A$ **は任意の点の近傍である**

特に，開核の性質 (3) が大事であるが，これらを 1 つずつ証明していこう.

開核の性質 (1) について，$\forall x \in \mathrm{Int}A$ ならば，定義より A は x の近傍である．よって近傍の公理 (1) より，$x \in A$．つまり，$\mathrm{Int}A \subset A$ である.

開核の性質 (2) について，開核の性質 (1) より，$\mathrm{Int}A \subset A$．$\forall x \in \mathrm{Int}A$ を考えると，仮定より，$A \subset B$ であるから，$\mathrm{Int}A \subset A \subset B$ なので，B も x の近傍になる．よって，$x \in \mathrm{Int}B$ となり，開核の性質 (2) が成り立つ.

開核の性質 (3) について，この性質が一番大事であるし，しっかり理解できておかないといけない.

開核の性質 (1) より，

$$\mathrm{Int}(\mathrm{Int}A) \subset \mathrm{Int}A$$

がいえる．次に，

$$\mathrm{Int}A \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Int}A)$$

を証明しよう．これが証明されれば，開核の性質 (3) が証明されたことになる．

この包含関係の意味は，$\forall x \in \mathrm{Int}A$ を考えると，$\mathrm{Int}A$ は x の近傍になっているということである．このことについて証明しよう．

$\forall x \in \mathrm{Int}A$ をとると，$\mathrm{Int}A$ の定義より，A は x の近傍である．よって，近傍の公理 (5) より，$\forall y \in M$ に対して A が y の近傍になっているような $M \subset A$ である x の近傍 M が存在する．このとき，$M \subseteq \mathrm{Int}A$ である．つまり，近傍の公理 (4) より，こんど $\mathrm{Int}A$ も x の近傍になる．よって，$\forall x \in \mathrm{Int}A$ に対して，$x \in \mathrm{Int}(\mathrm{Int}A)$ である．よって，$\mathrm{Int}A \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Int}A)$ がいえて，開核の性質 (3) が証明された．このことにより，$\mathrm{Int}A$ **は，**$\mathrm{Int}A$ **の任意の点の近傍であるということがいえた．これについて，混乱しないようにもう一度説明しておこう．$\mathrm{Int}A$ はもともと，A を近傍にもつ点の集合であると定義したが，つまり，$\forall a \in \mathrm{Int}A$ に対して，A は a の近傍になっているということであるが，この開核の性質 (3) を証明するまでは，$\forall a \in \mathrm{Int}A$ に対して，$\mathrm{Int}A$ は a の近傍になっているということはいえなかったのである．開核の性質 (3) では，これについて証明したのである．つまり，A **が近傍になっている点の集合** $\mathrm{Int}A$ **をいったん考えると，**A **が** $\mathrm{Int}A$ **に含まれる任意の点の近傍になっていることのみならず，**$\mathrm{Int}A$ **もそれらに含まれる任意の点の近傍にもなっているということである．つまり，$\mathrm{Int}A$ **は開集合 (開近傍) であることが証明されたのである．開集合については次節で解説する．

ここで，$\mathrm{Int}A$ が定義され，$\mathrm{Int}A$ の性質が解説されたことで，もう一度近傍の公理 (5) について考察しよう．U_x が x の近傍であるならば，定義より，$x \in \mathrm{Int}U_x$ である．このとき，$\mathrm{Int}U_x$ は点 x の近傍になっている．つまり，近傍の公理 (5) の W_x の正体は，$\mathrm{Int}U_x \subset U_x$ であることに注意すると，$\mathrm{Int}U_x$ といいたいところであるが，別に $\mathrm{Int}U_x$ でなくてもよい．感覚的な理解でよいが，$\mathrm{Int}U_x$ は，U_x が近傍となるもっとも大きい集合であるから，もっとも

大きい $\mathrm{Int}U_x$ を使わなくても，W_x は $\mathrm{Int}U_x$ の部分集合 (開近傍か開集合という条件がつく) を考えてもよいのである．近傍の公理 (5) は，**X の各点は，その点の任意の近傍の開核にある**という意味なのである．これは $\mathrm{Int}U_x$ の定義そのものだからいっている意味がないと思うかもしれないが，そうではなく $\mathrm{Int}U_x$ も x の近傍になっていることがポイントなのである．

開核の定義を，[12, p.119] のように，**位相空間 X の部分集合 A に包まれる X のすべての開集合の和集合**と解説し定義している本もある．いきなり，この解説で定義されても，はじめて学ぶものにとっては，なかなか意味がつかめないと思う．この定義を言い換えたら，任意の点で近傍のとれるすべての集合の和集合といういい方もできる．

2.12.4　近傍の作り方の注意点

こうして近傍の公理をこう定義した以上，**集合 X に近傍を定義するとき各個人が決めてよく，近傍の種類 (形) と個数を各点に定義していくことになる**ということである．この考えを大事にしよう．一般の集合に対して，近傍を定義して位相空間を作った．これはスポーツ好きの集合で近傍を定義したことを思い出せばよい．

位相空間 (各点に近傍が定義されている集合) といわれる空間は必ずしも，数直線 R やユークリッド平面 R^2 において定義されるものではない．つまり近傍を定義するのは必ずしも R や R^2 などのユークリッド空間とは限らない．近傍は集合に対して定義されるということが大事である．一般の集合に対して近傍が定義されるとき，必ず距離を使わないでも近傍が定義できるということである．距離関数を入れた位相空間 (距離空間) は，位相空間のほんの一部でしかないということである．

つまり，

> **位相空間を考える上でこれから大事になってくるのは，まず距離空間で考えているのか (距離を入れて近傍を作っているのか)，集合だけで考えているのか (距離を入れないで近傍を考えているのか) を考えないといけない**

ということである．

流れとしては，集合から各点に近傍を定義して位相空間 (近傍空間) という流れになる．

2.12.5 開集合

位相空間 (各点に近傍が定義されている集合)X の部分集合 U が開集合であるとは，$\forall x \in U$ において，U が x の近傍となっているとき U を**開集合**という．つまり，

$$\mathrm{Int}U = U$$

のとき，しかもこのときに限り U は開集合である．

この式の意味についてもう一度考えよう．第 2.2 章で，$\forall x \in U$ に対して，$B_\varepsilon(x) \subset U$ となれば，U を開集合と定義した．つまり，U は任意の点で近傍がとれる点の集合であった．このとき，U はその点の近傍であるといういい方をした．

$\mathrm{Int}U = U$ の式の意味は，$\mathrm{Int}U$ は，U を近傍にもつ点の集合であるので，その $\mathrm{Int}U$ が U と集合として一致するとき，U を開集合というのであるという意味である．

それなら，**開近傍**も開集合ではないかと思うかもしれないし，どう違うのかと疑問に思うかもしれないが，これは単なる視点の違いである．開集合とは任意の点で近傍のとれる集合でどの点を中心として考えるかは考えなく，開近傍とはある点を中心とした近傍を考え，しかもその近傍の任意の点で近傍が含まれる近傍である．つまりある点を中心とした開集合といってもよいであろう．何回も述べてきたが，少しでも特徴をもつと名前を定義するというのが位相空間論の真骨頂ではないだろうか．

また，先ほど話にも出てきたが，これらの開核の性質より次のことがいえる．

Int$A$ は，A に包まれる開集合のうちで最も大きいものである．すなわち，もし G が $G \subseteq A$ であるような X の開集合であるならば，

$$G \subseteq \mathrm{Int}A \subseteq A$$

が成り立つ．

これは，開核の性質の証明をみれば明らかであろう (特に開核の性質 (3))．

空集合は開集合

p.133 の節 2.2.9 で，空集合は開集合であることを説明した．このとき，閉集合の補集合が開集合と定義しているので，形式的に開集合を定義したような感は否めなかったが，開核を用いて次のように空集合が定義できる．空集合 $\varnothing$ は開集合である．なぜなら，

$$\mathrm{Int}\varnothing = \varnothing$$

が成り立つからである．この考えは，開集合の公理で非常に大事な性質になる．つまり，空集合 $\varnothing$ は元がなく，Int$\varnothing$ は近傍をとれる点がない，つまり空集合で，集合として同じということをいっているのである．少しは意味をもたせて考えることができたのではないだろうか．

結局近傍とは，前にも述べたように，W_x にあたるものを開近傍と説明した．近傍の公理を説明した段階では，集合が「開」という説明はされていなかったので，点の周りは近傍の公理 (5) のようないい方しか説明できなかった．しかし，すでに開集合という言葉を説明したので，近傍とは結局次のように言い換えることができる．

距離空間の場合 U が a の近傍となるには，

$$a \in B_\varepsilon(X,\, a,\, d) \subset U$$

となるような ε 近傍を含むことであるし，一般の集合で U が x の近傍となるには，

$$a \in W_a \subset U$$

となるような開近傍 (開集合)W_a が含まれるように定義する

ということなのである．このように定義すれば，近傍の公理を満たすということなのである．

近傍の公理が定義された以上，集合に対していろいろな近傍空間を考えることができる．以下，たくさんの同じ集合に対して，いろいろな近傍空間を作って，近傍に慣れていこう．

2.12.6　近傍の具体例

p.120 の節 2.2 で，ε 近傍の定義をした．近傍といえば ε 近傍を使ってきたが，この近傍はあるものを中心としてある距離未満の点の仲間を考えることであった．それでは，いままで何回も使って登場してきた ε 近傍が，近傍の公理を満たすことを証明してみよう．

ε 近傍は近傍の公理を満たす

ここでは，p.202 で解説した一般の X における ε 近傍

$$B_\varepsilon(X,\, a,\, d) = \{x | d(x,\, a) < \varepsilon,\, x \in X\}$$

を使うことにする．

ε 近傍と「近傍」の名前がついているが，定義の順番としては次のように考えるべきである．

まず集合 X の任意の点 a に，$B_\varepsilon(X,\, a,\, d)$ の集合族 $\mathfrak{N}(a)$ を考えるとき，この集合族 $\mathfrak{N}(a)$ は近傍の公理を満たす．このときはじめて，この集合族は $a \in X$ の近傍系となり，特にこの近傍を ε 近傍というとなるのである．

まず近傍の公理 (1) について，$\forall a \in X$ に対して，$B_\varepsilon(X, a, d)$ を定義しているので $\mathfrak{N}(a) \neq \varnothing$ である．以下，$B_\varepsilon(X, a, d)$ を $B_\varepsilon(a)$ と簡略化してかくことにする．

近傍の公理 (2) について，ε 近傍の定義から明らかであるが，あえて説明すると $B_\varepsilon(a)$ に含まれるどんな点も，a 自分自身との距離は 0 であるから，当然どんな正の数よりも小さくなっている．したがって，どんな $\varepsilon > 0$ をとろうとも，その中に a 自分自身は必ず含まれることになる．よって，$a \in B_\varepsilon(a)$ である．

近傍の公理 (3) について，$B_{\varepsilon_0}(a) \cap B_{\varepsilon_1}(a)$ を考えるが，$\varepsilon = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$ とすると，$B_\varepsilon(a) \in \mathfrak{N}(a)$.

近傍の公理 (4) について，$\forall \varepsilon_0 > 0$ に対して，$\varepsilon_0 < \varepsilon_1$ を選べば，$B_{\varepsilon_0}(a) \subset B_{\varepsilon_1}(a) \in \mathfrak{N}(a)$

近傍の公理 (5) であるが，これについては，p.203 の ε 近傍の開集合で証明しているが，もう一度やってみよう．$B_\varepsilon(a)$ の任意の点で，近傍がとれることを証明する．つまり，$\forall z \in B_\varepsilon(a)$ に対して，

$$\delta = \varepsilon - d(a, z)$$

とおくと，

$$B_\delta(z) \subset B_\varepsilon(a)$$

が成り立つことが証明できればよい．これを証明するには，

$$\forall p \in B_\delta(z) \to p \in B_\varepsilon(a)$$

を示せばよい．任意の z と任意の p がでてきて，証明がわかりにくければ，p.204 の図 2-29 をみて考えるとわかりやすい．実際 $\forall p \in B_\delta(z)$ に対して，

$$d(a, p) \leqq d(a, z) + d(z, p) < d(a, z) + \delta = \varepsilon$$

となるので，$p \in B_\varepsilon(a)$ がいえたので，(5) は成り立つ．ちなみに，(4) の内容で表現すると，$B_\varepsilon(a)$ の任意の点 z で $B_\delta(z) \subset B_\varepsilon(a)$ とできるので，$B_\varepsilon(a)$ は z の近傍でもあるといういい方ができる．

以上で，ε 近傍の集合族 $\mathfrak{N}(a)$ は近傍の公理を満たすので，集合 X の任意の点に ε 近傍を定義した (導入した) 集合は，位相空間 (近傍空間) となる．また，(5) が証明できたことによって，ε 近傍は開近傍 (開集合) でもある．

ここでもう一度確認しておくと，**距離を導入することによって考えられた ε 近傍は R や R^2 において，必ず開集合であった** (証明は p.203)．**ε 近傍と近傍は定義が違うので注意．ただし，近傍は ε 近傍と違って，開集合であるとは限らないことに注意．**

ε が開近傍であるので，次のように近傍を考えることができる

ε 近傍を含む集合は近傍の公理を満たす

ε 近傍は，開近傍であったので，距離の入った距離空間 X の部分集合 U が $a \in X$ において

$$B_\varepsilon(a) \subset U$$

を満たす X の部分集合族を $\mathfrak{N}(a)$ とおくと，$\mathfrak{N}(a)$ は近傍系の公理を満たす．

近傍の公理 (1) について，X の任意の点で，$B_\varepsilon(a) \subset X$ であるので，近傍系を満たしている．

近傍の公理 (2) について，$U \in \mathfrak{N}(a)$ に対して，$a \in B_\varepsilon(a)$ であるから，$a \in U$ である．

近傍の公理 (3) について，$U, V \in \mathfrak{N}(a)$ に対して，$B_{\varepsilon_0}(a) \subset U$，$B_{\varepsilon_1}(a) \subset V$ であるから，$\varepsilon' = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$ とすると，

$$B_{\varepsilon'}(a) = B_{\varepsilon_0}(a) \cap B_{\varepsilon_1}(a) \subset U \cap V$$

が成り立つので，$U \cap V \in \mathfrak{N}(a)$

近傍の公理 (4) について，$U \in \mathfrak{N}(a)$ に対して，$B_\varepsilon(a) \subset U$ であるから，$U \subset V$ である V に対して，$B_\varepsilon(a) \subset V$ となるので，$V \in \mathfrak{N}(a)$ である．

近傍の公理 (5) について，近傍の公理にある W_a にあたるものを，

$$W_a = B_\varepsilon(a)$$

とおくと，$\forall p \in B_\varepsilon(a)$ に対して，近傍を考えることができればよいのであるが，つまり，

$$B_\delta(p) \subset B_\varepsilon(a)$$

とできる $B_\delta(p)$ が存在するとよいのであるが，これについては先ほど証明できているので，(1)〜(5) より $\mathfrak{N}(a)$ は近傍系の公理を満たすことが証明された．

さて，ε 近傍を含む集合が近傍であることが証明された．よって，次の具体例を見ることによって，近傍は必ずしも開集合とは限らないということが，再確認できるであろうし，また近い近傍のとれる点で埋め尽くされていたらよいので，近傍という「近い」というようなイメージからほど遠いものまでが，近傍となることも理解しよう．

R において近傍と近傍でない例-ユークリッドの距離-

以下，R にユークリッドの距離が入っている距離空間 (位相空間) を考えていくことにする．このとき，$a \in R$ の ε 近傍は，

$$B_\varepsilon(a) = \{x | x \in R, |x - a| < \varepsilon\}$$

である．

R において，R の部分集合 $(3, 6) \cup (10, 20)$，$[3, 6]$，R は 5 の近傍である (5 の ε 近傍ではないことに注意)．なぜなら，先ほどの証明 2.12.6 をみてもわかるように，1 つでも 5 の ε 近傍がとれればよいのであるから，$B_{0.5}(5) \in (3, 6) \cup (10, 20), [3, 6], R$ であるから，R においてこれらの部分集合は 5 の近傍である．つまり，

$$(3, 6) \cup (10, 20), [3, 6], R \in \mathfrak{N}(5)$$

である．

これらの集合が近傍といわれてしまうと，近傍という言葉がかえって邪魔になるかもしれない．ε 近傍を含めばよいのであるから，近傍は閉集合でもよいわけである．これを考えてみても，5 の近傍はすべて近いとは限らない．距離空間の ε 近傍に慣れてきた私たちにとって，特に 1 つめの $(3, 6) \cup (10, 20)$ を 5 の近傍というのにはかなり抵抗があるかもしれない．近傍というものの意味をもう一度考える意味で，近傍にならないものを考えたらよい．

逆に，$\{0\}$ や $\{-3\}\cup\{0\}\cup\{5\}$，$[0,5)$ は，0 の近傍ではない．なぜなら，$\forall\varepsilon>0$ に対して，$B_\varepsilon(0)\not\in\{0\}$，$B_\varepsilon(0)\not\in\{-3\}\cup\{0\}\cup\{5\}$，$B_\varepsilon(0)\not\in[0,5)$ だからである．

もし，離散距離を入れていればこれらの部分集合は，すべて近傍となる．なぜなら，離散距離の ε 近傍は 1 点のみの場合もあるからである．

R^2 において近傍と近傍ではない例

R^2 においてユークリッドの距離がはいっているとする．このとき，$\boldsymbol{p}=(a,b)\in R^2$ の ε 近傍は，

$$B_\varepsilon(\boldsymbol{p})=\{(x,y)|\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\varepsilon\}$$

である．

$B_\varepsilon(\boldsymbol{p})$ を含む集合はその点の近傍となったので，円盤 $D^2=\{(x,y)|x^2+y^2<25\}$，R^2 は，原点 (0，0) の近傍である．なぜなら，$B_1((0,0))\in R^2, D^2$ だからである (もちろん，R^2 は任意の点の近傍でもある)．また，円盤 $D^2=\{(x,y)|x^2+y^2<25\}$ は，$B_1((1,1))\subset D^2$ であるから (1，1) の近傍でもある．

$X=\{(x,y)|y\geqq 0\}$ は原点 $(0,0)$ の近傍ではない．なぜなら，$\forall\varepsilon>0$ に対して，$B_\varepsilon((0,0))\not\subset X$ であるからである．

R における密着位相

p.235 の密着位相 2.12.2 で有限集合の密着位相を考えてきたが，もちろん実数の集合 R においても密着位相を考えることができる．

実数の集合 R において，次のような集合族を考える．

$\forall a\in R$ に対して，a の近傍を R のみとする．つまり，R のみ $\in\mathfrak{N}(a)$ とすると，近傍の公理を満たす．証明は略すが，近傍の公理 (5) については，$U_a=W_a=R$ とおけば，$U_a=R$ は $\forall p\in R=W_a$ に対して，$U_a=R\in\mathfrak{N}(p)$ となっているとなる．

密着位相を入れた場合，$\mathrm{Int}(3,5)=\varnothing$ であるので，開集合ではない．開区間 $(3,5)$ は，密着位相では開集合ではない ($\mathrm{Int}A=A$ となるときに，A が開集合というだけで，$\varnothing$ が開集合だからといって $(3,5)$ は開集合にはならない

ことにあらためて注意)．また，閉包 $\overline{(3, 5)}$ は，$\forall p \in R$ に対して，p の近傍 R と $(3, 5)$ は，$R \cap (3, 5) = (3, 5) \neq \varnothing$ より $\overline{(3, 5)} = R$ となる．

R のおける離散位相

有限集合の離散位相は，p.236 の例 2.12.2 で述べた．p.205 では，離散距離を入れた近傍などを考えた．ここでは，実数の集合 R に，距離を使わない離散位相を入れることにする．

離散位相とは一言で言えば，任意の点が「1 点」を近傍にもつ近傍を入れた位相空間である．各点がひとりぼっちの近傍をもち，バラバラの感じを与える位相空間でもある．

実数の集合 R に離散位相を入れるときは，近傍を次のように定義する．

$\forall a \in R$ に対して，a を含むRの部分集合 $U_a \in \mathfrak{N}(a)$ と考える．つまり，1 点 a から，R まで a を含んでいる R の部分集合すべてを a の近傍と考えるのである．

このとき，$\mathfrak{N}(a)$ は近傍の公理を満たすのである．これも証明を略すが，近傍の公理 (5) については，$\forall U_a \in \mathfrak{N}(a)$ に対して，$W_a = \{a\}$ とおけばよい．

このとき，$\mathrm{Int}\{a\} = \{a\}$ より，1 点は R において開集合であり，R の開近傍である (距離が入っていないので，ε 近傍という言葉は用いない)．離散位相を入れると，閉区間 $[3, 5]$ は，$\mathrm{Int}[3, 5] = [3, 5]$ なので開集合でもある．よって 3 の開近傍でもあるし，5 の開近傍でもあるし，$\forall p \in [3, 5]$ の近傍でもある．R は，$\forall p \in R$ の (開) 近傍でもある．

このように，近傍の定義の仕方で，閉区間が近傍になったりならなかったりするのである．これが，位相空間の真髄で，位相空間は近傍の入れ方によるのである．

その他，R についてのいろいろな近傍については，p.263 の基本近傍のところでもたくさん解説しているので，参考にしてほしい．

実数の集合 R は，何も宣言しなければ普通は，ユークリッドの距離 (絶対値) を用いて，近傍 (ε 近傍) を考えるが，流れとしては，近傍はこれを使うと最初に宣言しておかないといけないのである．

2.12.7　近傍を入れることによってできること

これは，p.216 の節でも述べたが，連続写像など定義できる．ここでは，収束について調べてみよう．収束といえば，第 1 章でも述べたように，近傍を使ったイプシロンデルタ論法を考えることができるようになるということである．

$\varepsilon - m$ 論法では，収束を ε 近傍を使って，収束の定義をした (p.33 参照)．これを一般化することにって，一般の位相空間においては数列の収束を次のようにできる．

位相空間 (近傍が定義された集合)X の点列 $\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ が点 a に収束するとは，a の任意の近傍 U($\varepsilon - m$ 論法では，どんなに小さい ε 近傍) に対して，ある番号 m が決まり，$n > m$ を満たす自然数すべてをそれぞれ対応させた数列の項が，$x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots \in U$ が成り立つことである．

このように，近傍を数列の収束だけに使うのではなく，たとえば先ほどの，節 2.12.6 についても，近づくという概念を与えることができるのである．5 人の集合 $X = \{a, b, c, d, e\}$ だけであると，単なる人の集合だけであってお互いの親密度がわからない．しかし，話の合う仲間 (近傍) を定義することによって，次のような親密度の収束？を考えることができる．

5 人の人間の集合で，どれくらいお互い親密度があるか考えてみる．近傍の意味を考えると，a の近傍 $\{a, b, c, d, e\}$ は，野球好きも話の合わないサッカー好き，剣道好きがいて a にとってはあまり親近感を感じるような近傍ではない，同様に，$\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, e\}$, $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c, e\}$, $\{a, b, d, e\}$ も，話の合う野球好きの b もいるが，サッカー好きや剣道好きもいて話の合わない仲間もいるということである．なかなか人数が少ないので？野球の話ばかりもできない状況である．そして最後に，近傍 $\{a, b\}$ を考えたとき，気兼ねなく野球の話が話ができる仲間まで考えることができるということである．

以上のような話の流れを，次のように考えることができる．a に近づくと

いうことを,「〜が好き」で定義された近傍では,

$$\begin{aligned}&\text{サッカーまたは野球または剣道が好きか}\\ \to\ &\text{サッカーまたは野球が好きか}\\ \to\ &\text{野球が好きか}\end{aligned}$$

というように，話の合う条件を次々とクリアしていくことと考えていくのである．ということは，結婚相手を選ぶのであれば，お互いの心が収束するような人 (同じ近傍にある人) を選べばとりあえずはうまくいく？ということをいっても言い過ぎではない．

大事なことは，a のいろいろな近傍の中に，b が入ってくるかどうかを見，また同様に，b のいろいろな近傍の中に a が入っているかを見ることで，a と b の親密度がわかるということである．つまりお互いが話が合うか，いま考えたいろいろな近傍を次々入るようにすることである．近傍を入れた「近づく」とは，近傍の条件を次々クリアしていくことなのである．近傍は近づくための一段階で，目安になるものであるということである．

この例の場合では，a の近傍の最後は $\{a, b\}$ であって，b は a に収束するようにみえるが，b にとってみれば野球だけでなくサッカーも好きであるから，a が野球の話ばかりしても飽きてしまう。たまにはサッカーの話でも盛り上がりたいという気持ちになり b の気持ちは近傍 $\{b\}$ に最後はなってしまい，a は最後は b の近傍からはずれてしまうので，a と b は収束しないとなる．

ただこれが，距離の入った近傍空間で収束を考えるのであれば，単純に ε の距離のみで，クリアできるかどうかを判断していくのである．これらの概念が，非常に大事で，**近傍という概念を集合に入れることによって，近づくという概念を与えている**ということである．つまり,

$$\text{集合に近傍を考える} \iff \text{「近づく」という概念を与える}$$

ということである．近傍が定義された位相空間 (近傍空間) になってはじめて，収束という概念を与えることができるのである．この収束という概念は，何も数列や関数だけではなく，このような集合に対しても考えることができるのである．

第 2 章でたくさんの位相空間論に関する言葉を ε 近傍という近傍を用いて定義した．もちろん，距離の入っていない，いままで説明した近傍を用いても位相空間に関する言葉を定義できる．よって一般化した近傍を用いて，一般化した位相空間の言葉を定義しよう．ε 近傍を使って定義しようが，一般の近傍を使って定義しようが概念は同じである．

2.12.8 一般の位相空間の外部・境界・触点・集積点・孤立点

内点があれば，外点がある．位相空間 X の部分集合 A の**外部**とは，

$$\mathrm{Int}(X - A) = \mathrm{Int}(A^c)$$

のことをいい A^e で表し，外部に属する点のことを，**外点**という．明らかに，

$$(A^c)^e = \mathrm{Int}A$$

が成り立つ．A^c は A の補集合を表す．

A の内部にも，A の外部にも属さない点全体の集合

$$(X - \mathrm{Int}A) \cap (X - A^e)$$

を A の**境界**といい ∂A で表し，境界に属する点を**境界点**という．

また，点 p の任意の近傍が部分集合 A と共通点をもつとき，p を A の**触点**といい，触点全体をなす集合を A の**閉包**といい，閉包を $\overline{A}$ で表す．そして，$\overline{A} = A$ が成り立つとき，A を閉集合という．

一般に，

$$\mathrm{Int}A \subset A \subset \overline{A}$$

という関係が成り立つので，A の内点は A の点であり，また A の点はもちろん A の触点であるということがいえる．また，

$$\partial A = \overline{A} - \mathrm{Int}A$$

であり，

$$A^e = (\overline{A})^c$$

と外点の集合も $\overline{A}$ を用いてかくことができる．このことより，位相空間 X において，X の任意の点は，部分集合 A の触点であるか A の外点であるかのいずれかである．

また，A の触点は，A の内点であるかまたは A の境界点であるかのいずれかであるので，

$$\overline{A} = \mathrm{Int}A \cup \partial A \qquad (\mathrm{Int}A \cap \partial A = \varnothing)$$

ともかける．また，$X = \overline{A} \cup A^e \quad (\overline{A} \cap A^e = \varnothing)$ であるから，一般の位相空間 X の部分集合 A を用いて，

$$X = \mathrm{Int}A \cup \partial A \cup A^e \tag{2-49}$$

が成り立つ．

なお，

$$\partial A = \overline{A} - \mathrm{Int}A = \overline{A} \cap (\mathrm{Int}A)^c = \overline{A} \cap \overline{A^c}$$

ともかけるので，A の境界点とは，A の触点であってしかも A^c の触点であるような点ともいえる．そして，

$$\partial(A^c) = \partial A$$

が成り立つ．

点 $p \in A$ が A の**孤立点**であるとは，p の**適当な**近傍と A の共通部分が p 一点のみのときをいう．つまり，p の近傍 $\exists U_p$ をとったとき，

$$U_p \cap A = \{p\}$$

が成り立つとき，p を A の孤立点という．また，p の**任意の**近傍 (距離空間では任意の ε 近傍) が p 以外の A の点を含むとき，$p \in X$ を A の**集積点**という．孤立点の場合は，$p \in A$ が大前提で，集積点の場合は $p \in X$ が大前提であることに注意．つまり，$p \in A$ で，しかも p が A の集積点でないときには，p は A の孤立点であるともいえる．

これは，p.134 で，$X = R$ の場合で解説したが，p は別に A の点でなくてもよいことに注意．

これらについては，p.169 以降，$X = R^2$ として，ユークリッドの距離の ε 近傍を使ったユークリッド空間で具体例で解説している．このように，一般化した位相空間と近傍において言葉を定義しても，結局は，図を描いて説

明するときは (考えるときは)，ユークリッド空間で考えて納得することが多いのである．だからこそ，私はイメージ理解のため，ユークリッド空間における，ユークリッドの距離の距離を使った ε 近傍を用いていろいろ定義してきたわけである．

またしつこいが，これらの言葉は，近傍が定義された位相空間になってはじめて定義できるということである．

それでは 1 つくらい，距離空間以外の位相空間でこれらの具体例を作って考えてみることにしよう．

距離空間以外の位相空間の内点・外点などの例

先ほど,「結局は，図を描いて説明するときは (考えるときは)，ユークリッドの距離の入ったユークリッド空間で考えて納得することが多い」と申し上げ，すぐにそれを否定するようで恐縮であるが，位相空間とは私たちが慣れた距離空間より一般化された空間である．この距離空間以外でも，具体例を作れるようになってはじめて，位相空間のイメージがわき，理解したともいえる．一般の位相空間の具体例として，p.233 の 5 つの元からからなる集合 $X = \{a, b, c, d, e\}$ からつくった位相空間で考えよう．そしてその各点の近傍系を p.233 のものを使おう．位相空間の言葉を具体例を使って確かめていくが，ただ答えのみを求めるだけでなく，どういう意味を含んでいるのか考えられるようになったら，より理解力が増したということがいえるだろう．

たとえば，$\mathrm{Int}\{a, b\}$ の意味は，**集合 (近傍でない!)**$\{a, b\}$ を近傍にもつ点の集合であるから，a と b しかいないので，$\mathrm{Int}\{a, b\} = \{a, b\}$ となる．また，$\mathrm{Int}\{c, d, e\}$ の意味は，**集合** $\{c, d, e\}$ を近傍にもつ点の集合であるが，e しかいないので，$\mathrm{Int}\{c, d, e\} = \{e\}$ となる．たとえば同様にして，

$\mathrm{Int}\{a, b, c\} = \{a, b\}$ である．これらの具体例をみたら分かるように，Int とは，完全に仲間のいる (各点の近傍を含む) 点の集合であるということもいえる．つまり，$\mathrm{Int}\{c, d, e\} = \{e\}$ は，c や d は，お互い c や d というサッカーに興味のある仲間がいるが，b がいないので完全な仲間は含まない．e は，剣道好きな仲間は e しかいないので完全なる仲間 (近傍) を含んでいる

ということである．

これらの議論を通して注意しておくことは，集合に対して各元のつながりをみるのに近傍を用いるということである．最初に**集合 (近傍でない!)**$\{a, b\}$ と注意したのもそのためである．また，$\mathrm{Int}\{a, b\} = \{a, b\}$ が成り立つので，X において $\{a, b\}$ は開集合であることをいっている (任意の点で近傍のとれる集合であることをいっている)

次に，$X - \{a, b\} = \{a, b\}^c = \{c, d, e\}$ であるが，$\mathrm{Int}\{c, d, e\} = \{e\}$ であったので，$\{a, b\}$ の外部 $\{a, b\}^e = \{e\}$ となる．この意味は，結局外部とは，集合 $\{a, b\}$ の a, b で，a は b しか野球好きの仲間がいないが，b には他にサッカー好きの c や d もいる．集合 $\{a, b\}$ こそ入っていないが，気になる仲間であることには違いない．つまり c や d も見えない仲間に入っていて，全く a や b に関係のない外の人間とは誰か，それは剣道好きの e である意味である．これが外部の意味である．また，集合 $\{c, d, e\}$ において，
$\{c, d, e\} \cap e$ のある近傍 $\{e\} = \{e\}$ とできるので，$e \in \{c, d, e\}$ は $\{a, b, e\}$ の孤立点といえる．

また，$\{a, b\}$ の閉包 $\overline{\{a, b\}}$ であるが，近傍 $\{a, b\}$ と X の各点のすべての近傍と交わる点の集合である．注意することは，各点の**任意の (すべての)** 近傍と交わらないといけない．c のすべての近傍 $\{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}$, $\{b, c, d, e\}, \{a, b, c, d, e\}$ と $\{a, b\}$ は交わる．同様にして，a, b, d の各点の任意の近傍とも $\{a, b\}$ は交わる．しかし，e のすべての近傍と $\{a, b\}$ が交わるかというと，交わるものもあれば，$\{e\}$ や $\{c, e\}$ などは交わらない．よって e は $\{a, b\}$ の閉包 $\overline{\{a, b\}}$ の点とはなりえないということで，
$\overline{\{a, b\}} = \{a, b, c, d\}$ となる．これらの観点から，閉包の意味は，a または b と話の合う仲間の集合ともいえる．野球好きの a と話があわなくても，サッカー好きの b さえいれば，b とサッカーで話の合う c, d も仲間に入れようということである．つまり，話の合う人のみで閉じているということである．この場合，e のみは，a とも b とも話が合わないということである．これが閉包の意味である．

以上より，

$$\partial\{a,\, b\} = \overline{\{a,\, b\}} - \mathrm{Int}\{a,\, b\} = \{a,\, b,\, c,\, d\} - \{a,\, b\} = \{c,\, d\}$$

となるので，$\{a,\, b\}$ の境界は $\{c,\, d\}$ である．この意味は，集合 $\{a,\, b\}$ において，a と b が野球好きで，c と d は野球に興味はないが，c と d は，野球好きでありサッカー好きの b とぎりぎりのところでつながっている．つまり $\{a,\, b\}$ の境界のところにいるという意味である．

よって，

$$\mathrm{Int}\{a,\, b\} \cup \partial\{a,\, b\} \cup \{a,\, b\}^e = \{a,\, b\} \cup \{c,\, d\} \cup \{e\} = X$$

と，p.252 の式 (2-49) が確かに成り立っている．

以上のように，近傍を仲間として考えると，位相空間の言葉も意味をもたせて物語のように説明することができることがわかったであろう．これが大事である．これを読んでいる読者も，その他 $\mathrm{Int}\{a,\, b,\, c\} = \{a,\, b\}$, $\overline{\{a,\, b,\, c\}} = \{a,\, b,\, c,\, d\}$，$\partial\{a,\, b,\, c\} = \{c,\, d\}$ などで近傍の物語を作ってみよう．

ただ無味乾燥にこれらの近傍を意味も与えず，ただ近傍の公理を満たすからこれらの集合族は近傍系をして扱えるとして，集合族をパズルのようにあつかって，位相空間の言葉の定義を考えてもまったくおもしろみがないと思うのである．

以上のように，開核・外部などを考えるときは，位相空間の近傍を使って定義されているということに注意しないといけない．各点に近傍が与えられた位相空間であるからこそ，点と点のつながりを考えることができる (点と点の完全なものから微妙なものまでの仲間意識を与えることができる) ということである．逆にいえば，位相空間の細胞 (核) にあたる近傍を定義してはじめて，これらの言葉が定義できるのである．

2.12.9　基本近傍系

いろいろな近傍空間 (位相空間) をつくってきた．近傍は，必ずしも開集合ではなかった．近傍をつくるときは，ある程度の大きさの近傍を用意してつくった．ある程度の大きさの近傍，基準となる近傍とは何であっただろうか．たとえば，ε 近傍でもあるし，人間の集合に対して,「〜が好き」というような近傍 (仲間) も，ある程度の大きさから出発して作った．もし，仲間 (近傍) が 1 人しかいなかったら，その人を含む集合はすべて近傍になった．つまり，近傍の公理を満たすものとして，点の周りの集合族を天下り的に考えるよりも，基準となる集合を先に決め，それを含むものとして考えた方が，近傍空間を作りやすいということであった．それらを基準として，近傍を考えることができた．

逆にいえば，**近傍系の公理に従って近傍の集合族を定義した場合，任意の近傍に対してそれに含まれる特別の形の近傍として考えることもできる．**

よって，次のような近傍系を考えることができる．X を近傍空間 (位相空間) として (つまり X の任意の点に近傍が定義されている集合)，$x \in X$ とする．点 x の近傍系 $\mathfrak{N}(x)$ の部分集合 $\mathfrak{N}^*(x)$ で，任意の (すべての)$U \in \mathfrak{U}(x)$ に対して (どんな x の近傍 U をとってきても)，$x \in U^* \subset U$ となる $U^* \in \mathfrak{N}^*(x)$ が存在するとき，近傍系 $\mathfrak{N}^*(x)$ を**基本近傍系** (または**近傍の基**) という．そして，$\mathfrak{N}^*(x)$ の元を**基本近傍**という．

基本近傍の具体例は，p.243 の 5 人の元でできている集合で近傍をつくる例を参考にすると一番イメージがわきやすいと考える．たとえば，a の近傍系 $\mathfrak{N}(a)$ に属するすべての近傍 U_a に対して，

$$\{a,\, b\} \in U_a$$

なので，a の近傍系 $\mathfrak{N}(a)$ の基本近傍系 $\mathfrak{N}^*(a)$ の **1** つは，

$$\mathfrak{N}^*(a) = \{\{a,\, b\}\}$$

としてできる．もちろん，**1** つと強調したのは，$\mathfrak{N}^*(a)$ は $\mathfrak{N}(a)$ の部分集合族で，$\{a,\, b\}$ を含んでいれさえすればよいので，

$$\mathfrak{N}^*(a) = \{\{a,\, b\},\, \{a,\, b,\, c\}\}$$

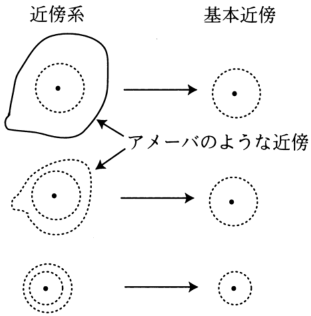
でもよいのである.

ここでもし基本近傍の定義を，任意の (すべての)$U \in \mathfrak{U}(x)$ に対して (どんな x の近傍 U をとってきても)，$U^* \subset U$ となる $U^* \in \mathfrak{N}^*(x)$ が存在するというような条件のみの集合にしてしまうと，a の近傍 $\{a, b, c\}$ に対して，$\{c\} \subset \{a, b, c\}$ も成り立ち，a を含まないような集合も考えることができ，この定義だけだと $\{c\} \in \mathfrak{N}^*(a)$ ということもあり得る．つまり，a の近傍には少なくともなり得ないものが存在する可能性がある．それなら $\mathfrak{N}^*(a)$ は，a を含む集合ではないかと考えるかもしれないが，そうではなくこの集合族 $\mathfrak{N}^*(a)$ は，あくまでも a に関係する集合族という意味である．だからこそ，$\mathfrak{N}^*(a) \subset \mathfrak{N}(a)$ という条件にしていれば，部分集合の定義より，$\forall U^* \in \mathfrak{N}^*(a)$ に対して，$U^* \in \mathfrak{N}(a)$ であるので，U^* は a の近傍でもある．よって必ず $a \in U^*$ ということがいえるのである．だからこそ，$\mathfrak{N}^*(a) \subset \mathfrak{N}(a)$ という条件は必要なのである.

少し話がそれた．しかし，もともとはこの a の近傍系 $\mathfrak{N}(a)$ は，$\{a, b\}$ を出発点として考えたので，基本近傍というのであれば，
$\mathfrak{N}^*(a) = \{\{a, b\}\}$ として考えた方が基本近傍のイメージがわきやすい．同様にして，$\mathfrak{N}^*(b) = \{\{b\}\}$，$\mathfrak{N}^*(c) = \{\{b, c, d\}\}$，$\mathfrak{N}^*(d) = \{\{b, c, d\}\}$，$\mathfrak{N}^*(e) = \{\{e\}\}$ と考えると，基本近傍のイメージがわきやすい．つまり，基本近傍系とは基準になる近傍のことで (私は少なくともそう理解しているし，ひょっとしたら他の意味もあるかもしれない)，集合に近傍を入れるとき，言い過ぎかもしれないが一番小さい近傍，いくらでも小さくできる近傍と考えたらよいのかもしれない．各点に近傍系 $\mathfrak{N}(x)$ が定義されていたとき，近傍系の「核」の部分に注目しようとするのである．$\mathfrak{N}(x)$ がこのように，有限個であれば $\mathfrak{N}^*(x)$ の元はただ 1 つに定まるかもしれないが，次の距離を入れて作った位相空間の場合は，基本近傍系は，無限個の ε 近傍の集合になる.

距離を入れて位相空間を作った場合，図 2-37 のように，どんな $U \in \mathfrak{N}(a)$ をとってきても，U に含まれる近傍を考えた場合，結局は，ε 近傍にたどりつく．つまり，距離空間の場合，近傍の「核」の部分は，ε 近傍である．その場合，基本近傍系の個数は，もちろん無限個であることはイメージできる

であろう．最後の方になると，どんな ε 近傍をとってきても，それに含まれる基本近傍は，ε 近傍であるということにたどりつく．



距離空間で近傍を考えている場合，結局は基本近傍系の定義
（どんな近傍をとってきても，その近傍を含む近傍）を
たどると，基本近傍は ε 近傍にいきつく．

図 2-37　距離空間の場合，基本近傍系は ε 近傍にたどりつく

その核の部分にあたる基本近傍の性質をまとめると，次のようになる．

基本近傍系の性質

(1) $\forall x \in X$ に対して，$\mathfrak{N}^*(x) \neq \varnothing$

(2) $\forall U_x^* \in \mathfrak{N}^*(x) \quad \rightarrow \quad x \in U_x^*$

(3) $U_x^*, V_x^* \in \mathfrak{N}^*(x)$ に対して，$W_x^* \subset U_x^* \cap V_x^*$ となる，$W_x^* \in \mathfrak{N}^*(x)$ が存在する．

(4) $U_x^* \in \mathfrak{N}^*(x)$ ならば，適当な $W_x^* \subset U_x^*, W_x^* \in \mathfrak{N}^*(x)$ が存在して，任意の $a \in W_x^*$ に対して，$V_a^* \in \mathfrak{N}^*(a)$ であって，$V_a^* \subset U_x^*$ となるものが存在する．

「近傍の公理」と「基本近傍系」の違いをきっちり説明していこう．「近傍の公理」とは，近傍とは以下の条件を満たす集合族を近傍というと約束したもので，「基本近傍系」とは，近傍の公理から得られる近傍の「核」の部分だと考えられる．その核の部分の特徴が基本近傍系の性質である．

「近傍の公理」と「基本近傍系」の条件はほとんど似ているが微妙に違っているものもある．1 つずつ解説していこう．大前提は，各点に近傍系が定義されていて，その近傍の「核」の部分の特徴の性質に注目するのである．

まずは，基本近傍系の性質 (1) である．基本近傍系 $\mathfrak{N}^*(x)$ は近傍系 $\mathfrak{N}(x)$ の部分集合であるという定義の大前提をおさえておく．各点 x に近傍系 $\mathfrak{N}(x)$ が定義されているので，近傍系の公理より，$\mathfrak{N}(x) \neq \varnothing$ である．よって，$U_x \in \mathfrak{N}(x)$ である x の近傍をとると，基本近傍系の定義より，どんな $\mathfrak{N}(x)$ の元をとってきても，$U_x^* \subset U_x$ となる U_x^* が必ず $\mathfrak{N}^*(x)$ に含まれているということであるので，

$$\mathfrak{N}^*(x) \neq \varnothing$$

である．つまり近傍の「核」にあたる部分は，空集合でないということが証明された．

次に基本近傍系の性質 (2) である．$\forall U_x^* \in \mathfrak{N}^*(x)$ をとると，$\mathfrak{N}^*(x) \subset \mathfrak{N}(x)$ と定義しているので，$U_x^* \in \mathfrak{N}(x)$ である．よって，U_x^* は，x の近傍でもある．よって，近傍の公理 (2) より，$x \in U_x^*$ がいえる．

次に基本近傍系の性質 (3) について考える．まずは「近傍の公理」と「基本近傍系」の表現の微妙な違いについて考えよう．「近傍の公理」では，$U_x, V_x \in \mathfrak{N}(x)$ に対して，$U_x \cap V_x \in \mathfrak{N}(x)$ という表現になっているが，これは，U_x と V_x が x の近傍であるなら，$U_x \cap V_x$ も x の近傍として考えるということである．つまり，x に関する集合 X の部分集合族 $\mathfrak{N}(x)$ を考えたとき，$U_x, V_x \in \mathfrak{N}(x)$ ならば，$U_x \cap V_x$ も $\mathfrak{N}(x)$ に含まれるように部分集合族を作らないといけないということでもある．

さて，基本近傍系の性質 (3) を読んでみると，$U_x^*, V_x^* \in \mathfrak{N}^*(x)$ に対して，$W_x^* \subset U_x^* \cap V_x^*$ となる，$W_x^* \in \mathfrak{N}^*(x)$ が**存在する**というような表現になっている．このような，W_x^* が存在することを証明してみよう．

$U_x^*, V_x^* \in \mathfrak{N}^*(x)$ であるならば，$\mathfrak{N}^*(x) \subset \mathfrak{N}(x)$ であるので，$U_x^*, V_x^* \in \mathfrak{N}(x)$ となり，U_x^*, V_x^* は x の近傍である．よって，$U_x^* \cap V_x^* \in \mathfrak{N}(x)$ である．したがって，x の近傍 $U_x^* \cap V_x^*$ に対しても，基本近傍系の定義より (どんな，

$U_x \in \mathfrak{N}(x)$ をとってきても，$U_x^* \subset U_x$ を満たす $U_x^* \in \mathfrak{N}^*(x)$ が存在するということである)，$W_x^* \subset U_x^* \cap V_x^*$ を満たす $W_x^* \in \mathfrak{N}^*(x)$ が存在する．

さて「近傍の公理」にあって,「基本近傍系の性質」にないもの．それは,「近傍の公理」(4) の条件である．これは，先ほどの「近傍の公理」(3) の条件と同じように x に関する集合 X の部分集合族 $\mathfrak{N}(x)$ を考えたとき，$\mathfrak{N}(x)$ が x の近傍といわれるには，$U_x \in \mathfrak{N}(x)$ に対して，$U_x \subset V$ であるならば，そんな X の部分集合 V も $\mathfrak{N}(x)$ に含まれていなければいけないし，そんな V も x の近傍と考えるのであるという意味である．何度も述べたが，近傍の公理は，この集合族を近傍というのだよという約束である．一方,「基本近傍系」は近傍の公理を満たすようにして各点に集合族を作ったときの，近傍のより小さい部分の特徴・性質を表したものであるので，近傍の公理 (4) に対応する基本近傍の性質は考えないでよいというか，考えることに意味がないのである．

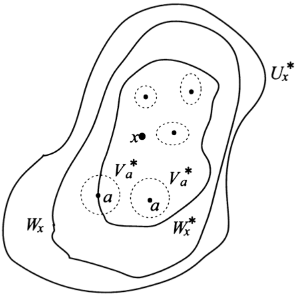
もう一度述べるが,「近傍の公理」は以下の条件を満たすものを近傍というという約束であり,「基本近傍」は近傍の公理を満たすように作った各点の近傍といわれる集合族の特徴である．

「近傍の公理」(5) と「基本近傍の性質」(4) であるが，これも非常に似ている．いわば,「近傍の公理」(3) と「基本近傍の性質」(3) と同じような関係のようにみえる．もう一度，約束と性質という意味の違いをはっきりさせながら解説していこう．

最初,「基本近傍の性質」(4) をみたときは何が何だかわからないのが，普通？だと思うが，論理的に問い詰めていけば，意味がわかるものである．それでは,「基本近傍の性質」(4) を証明してみよう．

$U_x^* \in \mathfrak{N}^*(x)$ とすると，$\mathfrak{N}^*(x)$ は $\mathfrak{N}(x)$ の部分集合なので，$U_x^* \in \mathfrak{N}(x)$ である．つまり，U_x^* は x の近傍である．よって，$W_x \subset U_x^*$ で，$\forall w \in W_x$ に対して，U_x^* が w の近傍となるような，$W_x \in \mathfrak{N}(x)$ が存在する．W_x は x の近傍であるから，基本近傍系の定義より，W_x に対しても，$W_x^* \subset W_x$ となる基本近傍 $W_x^* \in \mathfrak{N}^*(x)$ が存在する．このとき，$W_x^* \subset W_x \subset U_x^*$ である．よって，$\forall a \in W_x^*$ に対して，$a \in W_x$ でもあるから，U_x^* は a の近傍でもあ

る．つまり，$U_x^* \in \mathfrak{N}(a)$ である．U_x^* が $a \in W_x^*$ の近傍であるということは，$V_a^* \subset U_x^*$ となる，基本近傍 $V_a^* \in \mathfrak{N}^*(a)$ が存在する！ということである．図 2-38 を参照してみよう．図 2-38 を見るだけではそんなに難しいことをいっているようにはみえないと思われる．



W_x^*は，W_x^*の任意の点 a で $V_a^* \subset U_x^*$ となる近傍 V_a^*がとれる点の集合であり，x の基本近傍でもある

図 2-38　基本近傍の 4 つめの性質のイメージ図

2.12.10　基本近傍系の扱い

さて，各点に近傍系を定義することによって，その近傍系の「核」の部分「基本近傍系」の性質をみることができた．**実はこの基本近傍であるが，この基本近傍の扱いについて，位相空間論の執筆者にとって全く扱いが違う**のである．

参考図書 [12, p.123] には，基本近傍系を**定理**と解説している．そして，上記にまとめた基本近傍となるための条件を，「性質」として解説している．これは，[12, p.123] では，**まずは近傍系ができあがっていて (最初に近傍系をつくっておいて)**，その中で基本近傍系を定義して，その基本近傍系は「こんな性質をもっている」といった具合である．流れ的には，まずは近傍空間を定義して，近傍空間を成り立たせているものは何だろうかと考え，それは基本近傍系といわれるものである，となる．私もその流れで解説した．[19, p.64] では，基本近傍系を任意の近傍に含まれる特別な形として解説してあり，基

本近傍系の 4 つの性質を，基本近傍系となるための**条件**として解説してある．[20, p.188] では，基本近傍系を近傍系から得られる**公理**として解説してある．つまり，著者によって，基本近傍系の扱い方，とらえ方が違うということである．しかし，私の知る限り，いきなり基本近傍系を定義して，近傍の公理を解説しているものは見つけることができなかった．まず最初に，近傍の公理ありきは共通部分である．

また [16, p.73] では，基本近傍系を開近傍 (開集合) として定義しているので注意が必要である．一般に基本近傍系は開近傍で定義はしない．[19, p.64] では開近傍として基本近傍を定義していない．基本近傍系を開近傍として定義しているものも結構ある．基本近傍を開近傍として定義した場合，基本近傍の性質 (4) は，$W_w^* = U_w^*$ として，U_w^* そのものを開集合 (任意の点で近傍のとれる点) となるように定義している．

基本近傍系についていろいろな本の解説についてまとめてみよう．

基本近傍系を

1. 定理・性質として解説してあるものは，[12, p.123]
2. 公理として解説してあるものは，[16, p.73]，[19, p.64]，[20, p.188] など
3. 開近傍として定義しているものは，[12, p.123]，[16, p.73]，[18, p.89] など
4. 開近傍として定義していないものは，[19, p.64]，[20, p.188] など

実は近傍も開集合として定義している数学書もある．つまり，近傍を最初から開近傍として定義している数学書もあるのである．[12, p.122-126] や [8, p.122-126] などがそうである．この場合，x の近傍とは x を含む開集合と定義する．しかし，[18, p.122-126] にいたっては，近傍の公理を開集合の意味まで含めて基本近傍系で定義している．その他の参考図書にあげてある位相空間論の本は，開近傍を含む集合として近傍を定義していて，このように，最初に手にとって学ぶ本によって，近傍の出発点が違ってくるのである．はじめて学ぶものにとってみても，基本近傍系と近傍系の公理の違いも

わからないであろうし，これら 2 つの参考図書 [19, p.64] と [12, p.123] の基本近傍系に関する扱いの違いも全くわからないであろう．

私は，経験上，基本近傍系を一番シンプルに，開近傍に限定して議論していけば，よりスムーズに展望が開けるのではないかと考えている．そうすれば，近傍の公理との違いも鮮明になりよいのではないだろうか．特に工学系の学生にとっては，近傍を開集合で議論していってもかまわないとも私は考えている．

このように，近傍の定義が本によって微妙に違うので，はじめて位相空間論を学ぶ学生がいろいろな本を手にとって読んでも，わけがわからなくなるということはよくあることである．集合から位相空間という一番大事な位相空間の定義のところがこのような状態だから，位相空間論は難しいとなってしまうのである．これは私の経験上であるが，位相空間を学ぶときは，1 冊の本を読んでわからないとき，他のわかりやすそうな本を探してもっとわからなくなるということはよくあったが，ある程度のわりきりが必要である．ただし，そのわりきりがイメージとして定着するまでは，かなりの労力と時間が必要であることはいうまでもない．

2.12.11　基本近傍系の例

基本近傍系のメリット

基本近傍系のメリットは何であろうか．もちろん近傍系の公理を満たすための基準となる近傍系とも考えることができるが，次のようなメリットもある．

ユークリッドの距離の入った距離空間での ε 近傍を基準として考えた近傍系を考えてみよう．たとえば，$(-3,9)\cup[10,20]$ のような開区間と閉集合の和集合も 5 の近傍であったし，R も 5 の近傍であった．つまり，

$$(-3,9)\cup[10,20],\ R,\cdots\in\mathfrak{N}(5)$$

である．これは，ε 近傍を含むことが，その点の近傍になるということであった．基本近傍系の定義が，$\forall U_5\in\mathfrak{N}(5)$ に対して，$U_5^*\subset U_5$ となる U_5^* を含むような $\mathfrak{N}(5)$ の部分集合族 $\mathfrak{N}^*(5)$ を考えることであったので，このよ

うな近傍をはぶいて考えることができるというメリットがある．つまり非常にシンプルな近傍を考えることができるのである．**その点の近傍には必ず X が入っていたが，基本近傍の場合 X が入っていなくてもよいということもいえる．**これはこれらの近傍の基となっている基本近傍が ε 近傍であるからで，それのみさえ考えればよいからである．そうするとすべてが基本近傍のみで考えればよいはずである．

以上の観点から，近傍系の公理を満たすように各点に集合族を作れば，基本近傍という性質の近傍が現れたので，逆に基本近傍の性質を満たすような集合族を作り (こちらの方がシンプルでわかりやすい)，これを出発点にすれば，近傍系の公理を満たす集合族をつくることができると考える．つまり，基本近傍の性質というよりは，基本近傍の公理という観点から集合族を作り，それを含むという形で定義すれば近傍が定義できるという考えで以下，いくつか具体例を考えていく．**もちろん ε 近傍 $B_\varepsilon(a)$ は基本近傍である．**この他にもいろいろな基本近傍を考えることができる．距離空間のところでも述べたが，導入する近傍によって，内点，外点などの位相的性質がかわっていくところを学んでほしい．

基本近傍の例　-無限を含む開区間-

実数の集合 R において，次のような集合族を考える．

$\forall a \in R$ に対して

$$(-\infty,\, a+\delta)(\delta > 0) \text{ の集合族 } \mathfrak{N}^*(a)$$

は，基本近傍の性質を満たす．

基本近傍の性質 (1) について，$\forall a \in R$ において，$(-\infty,\, a+\delta)$ という R の部分集合を定義しているので，$\mathfrak{N}(a)$ は空集合ではない．

基本近傍の性質 (2) について，$a \in (-\infty,\, a+\delta) \subset R$ であるので，(2) は満たす．

基本近傍の性質 (3) について，δ_1,δ_2 を正の数として，$\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$ とすると，

$$(-\infty,\, a+\delta) = (-\infty,\, a+\delta_1) \cap (-\infty,\, a+\delta_2) \in \mathfrak{N}^*(a)$$

である．

基本近傍の性質 (4) について，$(-\infty, a+\delta) \in \mathfrak{N}^*(a)$ に対して，
$p \in (-\infty, a+\delta)$ をとれば，$p < a+\delta$ であるから，$a+\delta = p+\delta'$ とおくと，
$\delta' = a+\delta-p > 0$ である．よって，$(-\infty, p+\delta') \in \mathfrak{N}^*(p)$ となり，
$(-\infty, p+\delta') = (-\infty, a+\delta)$ であるから，$(-\infty, p+\delta') \subset (-\infty, a+\delta)$ がいえて，基本近傍の性質 (4) が証明された．

以上より，$(-\infty, a+\delta)(\delta > 0)$ の集合族 $\mathfrak{N}^*(a)$ が基本近傍の性質を満たすことが証明された．よって，$(-\infty, a+\delta)(\delta > 0)$ は R において，a の近傍として定義できる．また，これを含む集合も近傍である．

【内点や外点など】

$\forall a \in R$ に対して $(-\infty, a+\delta)(\delta > 0)$ を a の近傍として考えた場合の，内点や外点を考えてみよう．

R の部分集合である 開区間 (a, b) をもとに考えよう．たとえば，
$\mathrm{Int}(a, b) = \varnothing$ である．なぜなら，$\forall p \in (a, b)$ に対して，
$(-\infty, p+\delta) \not\subset (a, b)$ だからである．$(a, b)^c = (-\infty, a] \cup [b, \infty)$ で，
$\mathrm{Int}(-\infty, a] = (-\infty, a), \mathrm{Int}[b, \infty) = \varnothing$ なので，開区間 (a, b) の外部
$(a, b)^e = (-\infty, a)$ である．また，閉包 $\overline{(a, b)}$ であるが，$\forall\delta > 0$ に対して
$(-\infty, a+\delta)$ と (a, b) の共通部分が空集合とならない点 $p \in R$ の集合であるので，$\overline{(a, b)} = [a, \infty)$ である．なぜなら，$\forall p \in [a, \infty)$ に対して，
$(-\infty, p+\delta) \cap (a, b) \neq \varnothing$ だからである．

よって，$\partial(a, b) = \overline{(a, b)} - \mathrm{Int}(a, b) = [a, \infty)$ である．したがって，

$$(a, b)^e \cup \partial(a, b) \cup \mathrm{Int}(a, b) = (-\infty, a) \cup [a, \infty) \cup \varnothing = R$$

と，p.252 の式 (2-49) が成り立っている．

これからわかるように，R に入れる近傍によって，開集合になったりならなかったりすることがわかったであろう．しかし，p.252 の式 (2-49) は入れる近傍に関わりなく成り立つということである．

これは，距離空間のところでも述べたが，**内点や外点などの位相的な性質は，最初に定義する近傍によって変わってくる**ということである．

基本近傍の例　-無限を含む半閉区間-

実数の集合 R において，次のような集合族を考える．

$\forall a \in R$ に対して

$$[a,\, \infty) \text{ の集合族 } \mathfrak{N}^*(a)$$

は，基本近傍の性質を満たす ($\mathfrak{N}^*(a)$ の元は，$[a,\, \infty)$1 個である)．

基本近傍の性質 (1) について，$\forall a \in R$ において，$[a,\, \infty)$ という R の部分集合を定義しているので，$\mathfrak{N}^*(a)$ は空集合ではない．

基本近傍の性質 (2) について，$a \in [a,\, \infty) \subset R$ であるので，(2) は満たす．

基本近傍の性質 (3) について，$[a,\, \infty) = [a,\, \infty) \cap [a,\, \infty) \in \mathfrak{N}^*(a)$ と考えられるので，基本近傍の性質 (3) を満たす．

最後に，基本近傍の性質 (4) であるが，$U_a^* = W_a^* = [a,\, \infty)$ とおくと，$\forall p \in W_a^* = [a,\, \infty)$ に対して，$[p,\, \infty) \subset [a,\, \infty)$ となる，$[p,\, \infty) \in \mathfrak{N}^*(p)$ が存在するので，$\forall a \in R$ に対して $[a,\, \infty)$ の集合族 $\mathfrak{N}^*(a)$ は，基本近傍系を満たすことが証明された．よって，R において，a の近傍として定義できる．また，これを含む集合も近傍である．

【内点や外点など】

R にこの近傍を導入した場合，$\forall p \in [a,\, \infty)$ に対して，$[p,\, \infty) \subset [a,\, \infty)$ であったので，$\mathrm{Int}[a,\, \infty) = [a,\, \infty)$ となるので，$[a,\, \infty)$ は R において開集合となる！

また，開区間 $(a,\, b)$ についても考えよう．$\mathrm{Int}(a,\, b) = \varnothing$ より，開区間 $(a,\, b)$ は開集合ではない．$(a,\, b)^c = (-\infty,\, a] \cup [b,\, \infty)$，$\mathrm{Int}(-\infty,\, a] = \varnothing$，$\mathrm{Int}[b,\, \infty) = [b,\, \infty)$ より，$(a,\, b)^e = [b,\, \infty)$，$\overline{(a,\, b)}$ は，$\forall p \in R$ の任意の近傍が $(a,\, b)$ と常に共有点をもつ点の集合なので，$\overline{(a,\, b)} = (-\infty, b)$ である．よって，$\partial(a,\, b) = \overline{(a,\, b)} - \mathrm{Int}(a,\, b) = (-\infty, b)$ である．

したがって，この近傍を入れたときでも，

$$(a,\, b)^e \cup \partial(a,\, b) \cup \mathrm{Int}(a,\, b) = [b,\, \infty) \cup (-\infty, b) \cup \varnothing = R$$

と，p.252 の式 (2-49) が成り立っている．

基本近傍の例 -有限半開区間の近傍-

実数の集合 R において，次のような集合族を考える．$\forall a \in R$ に対して

$$[a,\, a+\delta)\,(\delta > 0) \text{ の集合族 } \mathfrak{N}^*(a) \tag{2-50}$$

は，基本近傍の性質を満たす．この近傍系も距離という概念が入っていないことに注意．

基本近傍の性質 (1) について，$\forall a \in R$ において，$[a,\, a+\delta)$ という R の部分集合が定義されているので，$\mathfrak{N}^*(a)$ は空集合ではない．

基本近傍の性質 (2) について，$a \in [a,\, a+\delta)$ であるので，(2) は満たす．

基本近傍の性質 (3) について，δ_1,δ_2 を自然数として，$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とすると，

$$[a,\, a+\delta) = [a,\, a+\delta_1) \cap [a,\, a+\delta_2) \in \mathfrak{N}^*(a)$$

である．

基本近傍の性質 (4) について，$U_a^* = W_a^* = [a, a+\delta)$ とおくと，$\forall p \in W_a^* = [a, a+\delta)$ に対して，$a < p < a+\delta$ より，$p+\delta' = a+\delta$ として，$\delta' = a+\delta-p > 0$ なので，$[p, p+\delta') = [a, a+\delta)$，つまり，$[p, p+\delta') \subset [a, a+\delta)$ となり，基本近傍の性質 (4) を満たす．

以上より，$\forall a \in R$ に対して $[a,\, a+\delta)\,(\delta > 0)$ の集合族 $\mathfrak{N}^*(a)$ は，R において，a の近傍として定義できる．また，これを含む集合も近傍である．同じようにして，$\left[a, \dfrac{1}{n}\right)$ (n は自然数) の集合族も基本近傍の公理を満たして，位相空間をつくることができる．

【内点や外点など】

R にこの近傍を導入した場合，$\forall p \in [a,\, \infty)$ に対して，$[p,\, p+\delta) \subset [a,\, \infty)$ であったので，$\mathrm{Int}[a,\, \infty) = [a,\, \infty)$ となるので，$[a,\, \infty)$ は R において開集合となる！もちろん，$[a,\, b)$ も開集合である．

また，開区間 $(a,\, b)$ についても考えよう．$\forall p \in (a,\, b)$ に対して，$[p, p+\delta) \subset (a,\, b)$ とできる $\delta > 0$ が存在するので，$\mathrm{Int}(a,\, b) = (a,\, b)$ より，開区間 $(a,\, b)$ は開集合である．

$(a,\, b)^c = (-\infty,\, a] \cup [b,\, \infty)$，$\mathrm{Int}(-\infty,\, a] = (-\infty,\, a)$，$\mathrm{Int}[b,\, \infty) = [b,\, \infty)$ より，$(a,\, b)^e = (-\infty,\, a) \cup [b,\, \infty)$，$\overline{(a,\, b)}$ は，$\forall p \in R$ の任意の近傍が $(a,\, b)$

と常に共有点をもつ点の集合なので，$\overline{(a,\,b)} = [a, b)$ である．よって，$\partial(a,\,b) = \overline{(a,\,b)} - \mathrm{Int}(a,\,b) = \{a\}$ である．

したがって，この近傍を入れたときでも，

$$(a,\,b)^e \cup \partial(a,\,b) \cup \mathrm{Int}(a,\,b) = (-\infty,\,a) \cup [b,\,\infty) \cup \{a\} \cup (a,\,b) = R$$

と，p.252 の式 (2-49) が成り立っている．

基本近傍の例　-閉区間-

実数の集合 R において，次のような集合族を考える．

$\forall a \in R$ に対して

$$\text{閉区間 } [p,\,q] \qquad (p < a < q \qquad p,\,q,\,a \in R) \text{ の集合族 } \mathfrak{N}^*(a)$$

は，基本近傍の性質を満たす．つまり，各点において，各点が閉区間の中にあるような「閉区間の集合族」は，その点の近傍になるということである．

基本近傍の性質 (4) だけ解説しておく．$U_a^* = [p,\,q](p < a < q$ かつ，$p,\,q,\,a \in R)$，$W_a^* = (p,\,q)(p < a < q \quad p,\,q,\,a \in R)$ とおくと，$\forall s \in (p,\,q)$ に対して，$[p_s,\,q_s](p < p_s < s < q_s < q \quad p_s,\,q_s,\,s \in R) \subset U_a^* = [p,\,q]$ となる，$[p_s,\,q_s] \in \mathfrak{N}^*(s)$ が存在するからである．

【内点や外点など】

閉区間も R において近傍になることがわかったが，$\mathrm{Int}[p,\,q] = (p,\,q)$ となり，結局は閉区間 $[p,\,q]$ は，開集合にはならなく，近傍になるからといって開とは限らないのである．$[p,\,q]^c = (-\infty,\,p) \cup (q,\,\infty)$ の任意の点で，閉区間を含むことができるので，外部 $[p,\,q]^e = (-\infty,\,p) \cup (q,\,\infty)$ である．

$\overline{[p,\,q]} = [p,\,q]$ であるので，$\partial[p,\,q] = \overline{[p,\,q]} - \mathrm{Int}[a,\,b] = \{a\} \cup \{b\}$ である．

つまり，閉区間 $[p,\,q]$ を含むように定義された近傍は，$\forall a \in R$ に対して

$$\text{開区間 } (p,\,q) \qquad (p < a < q \qquad p,\,q,\,a \in R) \text{ の集合族 } \mathfrak{N}'^*(a)$$

で定義される基本近傍系と同じ結果になったわけである (証明をしなくても明らかであろう)．

また (基本) 近傍は，閉とか開とか関係ないことがこの例からでもわかるであろう．何度も述べたとおり，開集合は近傍が任意の点で考えられる集合として，近傍を使って定義されるのであって，近傍を作った段階では，開という概念は必要ないのである．

基本近傍となりえない例

実数の集合 R において，次のような集合族を考える．$\forall a \in R$ に対して

$$(a-1,\, a+1)$$

の集合族 $\mathfrak{N}^*(a)$($\mathfrak{N}^*(a)$ の元は，$(a-1,\, a+1)$ のみ 1 個である)．は，基本近傍の性質を満たさない．

基本近傍の性質 (1)〜(3) は満たすが，(4) について，$U_a^* = (a-1,\, a+1)$ に対して，いかなる $U_a^* = (a-1,\, a+1)$ の a に関する部分集合 W_a^* を探そうとも，$\forall p \in W_a^*$ に対して，$(p-1,\, p+1) \not\subset (a-1,\, a+1)$ となるから，基本近傍の性質 (4) を満たさないので，$(a-1,\, a+1)$ の集合族 $\mathfrak{N}^*(a)$ は近傍系になることはできない．

以上より，いろいろな基本近傍を紹介してきたが，R には基本近傍の性質を満たしさえすればいくらでも近傍を定義できる．基本近傍が定義できれば，それを含むような集合はすべて近傍になる．また，導入する近傍の種類によって，内点，外点などの性質も変わることが理解できたはずである．

コメント

以上の近傍の例から分かるように，各点において $(a-1,\, a+1)$ など区間が縮まらないような集合をもつようなものは近傍となりえないような雰囲気がある．また，たとえ縮まらなくても，区間のどっちが無限を含んでいれば近傍になっている (もしかしたら例外があるかもしれない)．つまり，より小さい集合を含むことができるかどうかが近傍のポイントのような気がする．

こうして定義された近傍も距離が入っていないことに注目する．とにかく，近傍とは (基本) 近傍の公理を満たしていればよく，集合に対して近傍を定

義するのである．特に，ユークリッド空間において，ユークリッドの距離を用いて作られた位相空間 (近傍空間) を**通常の位相**という．つまり，高校までの数学は，通常の位相空間でいろいろ問題を考えてきたということである．

これらの例からもわかるように，

> **位相空間のいろいろな点のみならず，開集合や閉集合の概念も，取り入れる近傍に依存するということで，位相空間は近傍が支えているのであるし，特徴付けているのである．**

2.12.12　集合に入れる近傍によって変わる性質

いままでは，集合に入れる近傍によって内点や外点などの位相的性質が変わることを示してきたが，その他入れる近傍によって変わる性質は何か考えてみる．身近なものとしては，収束する無限数列である．

収束する数列を考えるとき，R の場合ユークリッドの距離である絶対値を使って定義したが，これは任意の ε 近傍に，ある番号から先の数列の項すべてがすっぽり入るかが問題であるとかき直すことができる．つまり，収束する数列も ε 近傍といわれる近傍に依存していることになる．

よって，収束する数列が近傍の種類や性質によってどのように変わるのか，説明してみよう．

一般の近傍を入れた位相空間での，収束する数列の定義

p.249 の節 2.12.7 で，少しだけ一般の位相空間において収束する数列の定義を述べた．ここでは，きちんと述べることにしよう．

> **一般の位相空間において，点列の収束の定義**
>
> U_p を p の任意の近傍とするとき，点列 $\{p_n\}(p_n \in X)$ が p に収束するとは，$n > m$ ならば $p_n \in U_p$ を満たす m が存在する．

となる．つまり，点列が収束するかどうかは，点列の式によるのではなく，**近傍によって決まる**ということである．点列とは，すべての自然数 1,2,3,$\cdots$ の各々に対して、集合 X に属する点 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ を定めたものを、集合 X 上の点列というが，ここでは，点列と数列を同じに扱う．

第 1 章で，収束するかどうかは，数列の一般項を考え，機械的な計算により極限値を予想し，絶対値を用い，$\varepsilon - m$ 論法を使って証明した．予想した極限値と数列がいくらでも小さくできるということで ε はいくらでも小さくできた (ε は任意であった)．この考えを一般の位相空間に拡張したのが先ほどの点列の収束の定義である．一般の位相空間の近傍は距離が入っていないので，$\varepsilon - m$ 論法は使えないので，$\forall\varepsilon > 0$ に対してという部分 (ε 近傍の部分) が，$\forall U_p$ という表現に変わっていることに注意する．

密着位相を入れたときの収束する数列の極限値

R に密着位相を入れる．つまり，$\forall p \in R$ の近傍は R のみだけである．つまり各点の近傍は R しか考えてはいけない．ということで，次のような奇妙なことがおこる．

数列 $\dfrac{1}{n}$ を考える．密着位相では，数列 $\dfrac{1}{n}$ は 5 にも収束するし，100 にも収束する．なぜなら，5 の任意の近傍 $U_5 = R$(1 つしかない！) に対して，ある数 $m = 0$ をとったとき，$n > 0$ を満たす自然数すべてに対応する数列の項は

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \in U_5 = R$$

を満たしているからである．同様にして，100 の任意の近傍 $U_{100} = R$(1 つしかない！) に対して，ある数 $m = 0$ をとったとき，$n > 0$ を満たす自然数すべてに対応する数列の項は

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \in U_{100} = R$$

を満たすので，100 にも収束する．

ということは，同じような考えで，R に密着位相を入れている場合，任意の数列は R のすべての実数に収束するというわけのわからない？ことがいえるのである．

離散位相を入れたときの収束する数列の極限値

離散位相を入れたとき，各点の一番小さい近傍は「1 点」のみの近傍である．よって，$\forall a \in R$ の任意の近傍 U_a に対して，ある数 m より大きいすべ

ての自然数に対応する数列の項が $x_n \in U_a$ とできる数列でないと収束しないということであるが，これは $U_a = 1$ 点 $\{a\}$ に対しても，この近傍内にある数列でないといけないということである．

ということは，離散位相を入れたとき，たとえば 5 に収束する数列とは，p.41 の数列 (1-12)，

$$1, \frac{1}{2}, 3, \frac{4}{5}, 5, 5, 5, \cdots$$

や

$$5, 5, 5, \cdots$$

などである．よって，$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ は離散位相では収束しない．

近傍 $\{(-\infty, a+\delta)\}$ を入れたときの収束する数列の極限値

p.266 で導入した基本近傍 $\{(-\infty, a+\delta)\}$ をいれたときの，収束する数列を考えよう．

たとえば，$\forall\delta > 0$ に対して (任意の 5 の近傍 $(-\infty, 5+\delta)$ に対して)，ある数 $m = 0$ をとったとき，$n > 0$ を満たす自然数すべてに対応する数列の項は

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \in U_5 = (-\infty, 5+\delta)$$

となるので，5 に収束するし $\forall\delta > 0$ に対して (任意の 100 の近傍 $(-\infty, 100+\delta)$ に対して)，ある数 $m = 0$ をとったとき，$n > 0$ を満たす自然数すべてに対応する数列の項は

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \in U_{100} = (-\infty, 100+\delta)$$

と 100 に収束をする．

1 つの数列を考えたときに，極限値が複数出てきたが，位相空間での極限値は，式によるというよりも近傍に依存するわけである．極限値を 2 つもつかどうかは，次のハウスドルフ空間という位相的な性質によって決まるのである．

2.12.13　ハウスドルフ空間

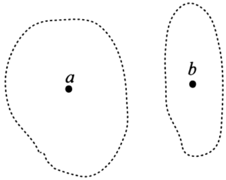
位相空間 X の異なる 2 点 a, b に対して，それぞれの近傍を U_a，U_b としたときに，

$$U_a \cap U_b = \varnothing$$

とできるときに，この位相空間 X を**ハウスドルフ空間**であるという．

コメント

前にも述べたが，一般の位相空間を定義し解説したとしても，どうしても距離の入った位相空間で図にかいて考えてイメージして理解してしまう．これは間違っていないし，仕方のないことである．ハウスドルフ空間をはじめて学んだときもその例外ではないが，これが災いしてどんな縁のない開集合も交わらないようにすぐにかけるので，こんなのどんな場合でも成り立つのではないかと位相空間すべてがハウスドルフ空間と悩んでしまう．位相空間の言葉を，すべてを距離の入った位相空間で考えるのも善し悪しの例だと，個人的な経験から思ってしまう．



位相空間を学びたてのときは，平面に図のように開集合をはなしてかいて，どんな位相空間もハウスドルフ空間ではないかと思ってしまう．

図 2-39　ハウスドルフ空間のイメージ

ハウスドルフ空間ではない例

p.263 以降で考えた，基本近傍を使って具体例を考えると，たとえばハウスドルフ空間ではない位相空間は，R に近傍を

$$(-\infty,\, a+\delta)(\delta > 0),\ [a,\, \infty)$$

などを定義したときである．なぜなら，$a < b$ に対して，
$(-\infty, a+\delta) \cap (-\infty, b+\delta') = (-\infty, a+\delta) \neq \varnothing$ となるからである．

また，p.233 の 5 人の好きグループで作った近傍空間はハウスドルフ空間ではない．なぜなら，a の近傍系 $\mathfrak{N}(a)$，b の近傍系 $\mathfrak{N}(b)$ のどの近傍をとってきても $U_a \cap U_b \neq \varnothing$ だからである．

もちろん，密着位相もハウスドルフ空間ではない．以上の様に R のみならず，有限集合でも作った位相空間でも，近傍の定義の仕方によって，いくらでもハウスドルフ空間でないものをつくることができる．

距離空間はハウスドルフ空間

距離空間はハウスドルフ空間

【解説】

先ほどのコメントでも述べたが，普通に境界をもたない開集合を 2 つ平面にかくとき，普通に交わらないようにかくことができた．これは，距離空間がハウスドルフ空間であるからである．

【証明】位相空間 X の 2 点 $a, b (a \neq b)$ に対して，$\varepsilon = d(a, b)$ とおくと，

$$B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b) = \varnothing$$

となるからである．

定理：ハウスドルフ空間では数列の極限はただ 1 つに定まる

ハウスドルフ空間では数列の極限はただ 1 つに定まる

【証明】点列 $p_n \to p$，$p_n \to q$，$p \neq q$ とする．このとき，ある数 m が決まり，$n > m$ を満たすすべての自然数に対応する数列の項
$p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, \cdots \in U(p)$，かつ $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, \cdots \in U(q)$ が成り立つ．このとき，$U(p) \cap U(q) \neq \varnothing$ となる．しかしハウスドルフ空間より，これは $U(p) \cap U(q) = \varnothing$ の仮定に矛盾する．

よってハウスドルフ空間であれば，極限値は 1 つに定まる．

【解説】

第 1 章で極限値の p.68 の定理 1.14.1 で述べたように，収束数列の極限の一意性は，距離空間のハウスドルフ性からきていたものだったということである．

2.12.14　ユークリッドの距離を入れた位相空間と近傍 $[a,\, a+\delta)$ をいれた位相空間で収束する数列を考える

p.125 で，集合に属する任意の収束する無限数列の極限値を含む集合として閉集合を定義した．このとき，開区間 $(a,\, b)$ は極限値を含まなかったので閉集合ではなかったし，$[a,\, b]$ は閉集合であった．

先ほどまでいろいろな近傍を考えて，いろいろ開集合や閉集合を考えてきた．今回半開区間 $[a,\, b)$ について，ユークリッドの距離を入れた位相空間と近傍 $[a,\, a+\delta)$ をいれた位相空間で収束する数列を考えてみることにしよう．

近傍 $[a,\, a+\delta)$ をいれた位相空間では，$\overline{[a,\, a+\delta)} = [a,\, b)$ だったので，半開区間 $[a,\, b)$ はこの位相空間においては，閉集合であった (開集合でもあった)．このとき，半開区間 $[a,\, b)$ に属する任意の収束する無限数列 $\{p_n\}$ の極限値は，半開区間 $[a,\, b)$ に属さないといけないが実際はどうなっているのであろうか．

ここでは，具体的な数字で考えよう．$[0, 2)$ として，無限数列 $\left\{2 - \dfrac{1}{n}\right\}$ を考える．このとき式だけみれば 2 に収束するようにみえるが，**収束するかどうかは近傍によるものだったことに注意**．よって，図 2-40 を見てもわかるように，2 の近傍は $[2,\, 2+\delta)$ であるから，δ をいくら小さくしても，$[0, 2)$ に属する無限数列は，2 の近傍 $[2,\, 2+\delta)$ に含まれない．よって，2 には近づけないことがわかる．よって，この近傍をいれているとき，$[0, 2)$ において，$[0, 2)$ に属する無限数列で 2 に収束する数列は考えられないということがわかる．

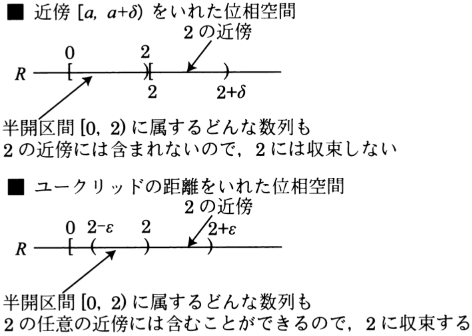


図 2-40　入れる近傍によって極限値が変わる

逆に 0 には収束するか考えてみると，たとえば $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ を考えると，$\left\{\dfrac{1}{n}\right\} \in$ $[0, 2)$ であり，0 の近傍 $[0,\delta)$ を考え，$\forall\delta > 0$ に対して，ある番号 m より大きいすべての自然数に対応する数列の項すべてを 0 の近傍 $[0,\delta)$ に属するようにできるので，この近傍空間において $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ は 0 に収束するとしてよい．同じようにして，$[0, 2)$ に属する任意の無限数列は，$[0, 2)$ の任意の点には収束することができるので，つまり極限値をすべて含んでいるということになる．

ユークリッドの距離を入れている場合は次のようになる．同じようにして，半開区間 $[0, 2)$ として，無限数列 $\left\{2-\dfrac{1}{n}\right\}$ を考える．ユークリッドの距離を入れている場合は 2 に収束する数列である．実際，2 の近傍 $B_\varepsilon(2) = (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$ を考え，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，ある番号 m より大きいすべての自然数に対応する数列の項すべてを 2 の近傍 $B_\varepsilon(2) = (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$ に属するようにできるので，2 に収束することがいえる．しかしこの半開区間では，2 は含まれていない．よって閉集合とはいえないということである．

これらの例をみてもわかるように，開区間とか閉区間とか半開区間などでの形だけをみて開集合や閉集合を判断するのではないということがわかったはずである．もちろん収束する数列の極限値が含まれるかどうかも，開区間

とか閉区間とか半開区間などでの形などで判断するのではない．すべては，近傍に依存しているということである．

最後にもう一つ近傍の特徴について解説しておこう．

2.12.15　縮む近傍

いろいろな近傍を，近傍の公理 (基本近傍の性質) を使っていろいろ作ってきたが，近傍の特徴の 1 つにハウスドルフ空間という性質があった．つまり，近傍の公理を使って近傍を作っても，違う性質の位相空間ができた．その結果，極限値が複数あるかそれとも 1 つかなどの違いが出てきた．その他どのようなものがあるかというと，たとえば次のようなものがある．簡単に説明しておこう．

たとえば，基本近傍で考えたのは，ε 近傍 $B_\varepsilon(a)$，$[a,\, a+\delta)$ などである．ここで直感的ではあるが，$B_\varepsilon(a)$ や $[a,\, a+\delta)$ は ε や δ の加減で縮むことができる (a に近づくことができる)．しかし，$[a,\, \infty)$ は縮むことができない．**近傍が縮むかどうかということは，近傍系の公理だけに頼っては出てこないのである．**近傍系を使って近傍を定義したとき，同じ近傍でもこのようにまたいろいろな特徴をもったもので分類できるということである．これについては，近傍を自然数と対応できるかどうかの第一可算公理という大切な概念の説明になっていくのであるが，難しい内容であるからここでは詳しくは述べないことにする．ただ，いままで説明したように，近傍にもいろいろな特徴が出てきたということだけは，理解しほしいと思う．

2.13　開集合の公理 (開集合の性質・特徴)

位相空間とは，各点 (各元) に近傍が定義された空間であった．近傍が定義されたことによって，開集合という新たな集合を考えることができた．開集合はどの点も近傍をとれる集合で (その集合が近傍となる点の集合で，また距離空間であれば任意の点で ε 近傍を含む集合で) ある．これを式で表せば，$\mathrm{Int}A = A$ となるときである．この開集合の定義式は，近傍を使って定義されている．開近傍も開集合であったが，p.241 でも述べたように，開近傍か

開集合のどっちの言葉を使うかは，視点の違いであるということであった．

ここでは，開集合に注目して，開集合の特徴について調べることにしよう．任意の点で近傍が定義された近傍空間 (位相空間)X を考える．まず，近傍空間 X の任意の点で，近傍が定義されているので，つまり集合 X の任意の点で近傍がとれるということなので，集合 X は開集合である $\mathrm{Int}X = X$ という意味でもある..

p.243 の 5 つの集合に対して導入した近傍空間で具体的に考えよう．各元の近傍ではなく，各元の開近傍だけ (つまり開集合だけ) 取り出してみると，

a の開近傍:$\underline{\{a, b\}}$,$\underline{\{a, b, e\}}$,$\underline{\{a, b, c, d\}}$,$\underline{\{a, b, c, d, e\}}$
b の開近傍:$\underline{\{b\}}$,$\underline{\{a, b\}}$,$\underline{\{b, e\}}$,$\underline{\{a, b, e\}}$,$\underline{\{b, c, d\}}$,$\underline{\{a, b, c, d, e\}}$
c の開近傍:$\underline{\{b, c, d\}}$,$\underline{\{a, b, c, d, e\}}$
d の開近傍:$\underline{\{b, c, d\}}$,$\underline{\{a, b, c, d, e\}}$
e の開近傍:$\underline{\{e\}}$,$\underline{\{b, e\}}$,$\underline{\{a, b, e\}}$,$\underline{\{b, c, d, e\}}$,$\underline{\{a, b, c, d, e\}}$

となる．

これらの，開集合 (開近傍) だけ集めた近傍空間 X の部分集合族を $\mathfrak{F}$ とすると，

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}' = \{&\{b\}, \{e\}, \{a, b\}, \{b, e\}, \{a, b, e\}, \{b, c, d\}, \\ &\{a, b, c, d\}, \{b, c, d, e\}, \{a, b, c, d, e\} = X\} \end{aligned} \tag{2-51}$$

となるが，これは実は不完全である．なぜ不完全か以下説明していきたい．

まず，$\mathfrak{F}'$ の元，つまり開近傍 (開集合) の特徴は何であろうか．その特徴について考えてみたい．たとえば，$\{b\} \cup \{e\} = \{b, e\} \in \mathfrak{F}'$，
$\{a, b, e\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d, e\} \in \mathfrak{F}'$，$\{b\} \cup \{e\} \cup \{a, b\} = \{a, b, e\} \in \mathfrak{F}'$ など，$\mathfrak{F}'$ に属する開集合の和集合は，$\mathfrak{F}'$ に属する，つまり開集合になるということである．これは，近傍の作り方から明らかである．つまり，各開近傍は任意の点において近傍がとれるので，和集合にしてもとれるのは当然である．和集合は無限個でもよい．無限個とはかかず，任意個というかき方を

する．また逆に，$\{b\} \cap \{e\} = \varnothing \in \mathfrak{F}'$，$\{a, b, e\} \cap \{a, b, c, d\} = \{a, b\} \in \mathfrak{F}'$，$\{a, b, c, d\} \cap \{b, c, d, e\} = \{b, c, d\} \in \mathfrak{F}'$ など，$\mathfrak{F}$ に属する開集合の共通部分は，$\mathfrak{F}'$ に属する，つまり開集合になるということである．

近傍と大きく違うところは，$\{b\} \cap \{e\} = \varnothing$ の部分であろう．各点の近傍系には，$\varnothing$ はないのであるが，p.242 の節 2.12.5 で説明したとおり $\varnothing$ は開集合である．理由は，$\mathrm{Int}\varnothing = \varnothing$ が成り立ち，ここでは趣味の合わない集合では近傍がとれないという意味となるであろう (空集合と空集合が一致するので $\varnothing$ は開集合である)．

よって，集合族 $\mathfrak{F}'$(2-51) に空集合 $\varnothing$ を入れることによって，

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{F} = \{&\{b\}, \{e\}, \{a, b\}, \{b, e\}, \{a, b, e\}, \{b, c, d\}, \\
&\{a, b, c, d\}, \{b, c, d, e\}, \{a, b, c, d, e\} = X, \varnothing\}
\end{aligned}
$$

となり，$\mathfrak{F}$ は開集合の集合として完璧となり，$\mathfrak{F}$ の任意の元の共通部分を考えても，必ずその共通部分は $\mathfrak{F}$ に属していると完全にいえるようになるのである．

さらに，気をつけないといけないことがある．それは，この具体例ではわからないが，共通部分をとるときのその個数である．これは，たとえばユークリッド空間の位相空間で，開集合を考えてみよう．この場合，R において開区間 $U_n = \left(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$ は開集合であるが，この開集合の共通部分を無限個とると，

$$
\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\} \tag{2-52}
$$

となり，R において，ユークリッドの位相空間では 1 点は閉集合である (p.132 参照)．よって，開集合の無限個の共通部分は開集合にならないときがあるので,「開集合の**有限個**の共通部分は開集合である」となる．

以上が開集合の特徴であるが，これらをまとめると，

開集合の特徴

(1) 集合 X，空集合 $\varnothing$ は開集合である．

(2) 開集合の**任意個**の和集合は開集合である．

(3) 開集合の**有限個**の共通部分は開集合である．

となる．そして，これらの内容を文字式を使って表すと次のようになる．

開集合の公理 (文字式を使って)

(1) $X \in \mathfrak{F}$，$\varnothing \in \mathfrak{F}$

(2) $\mathfrak{F}$ に属する**任意個数 (有限または無限)** の X の部分集合の和集合はまた $\mathfrak{F}$ に属する．つまり，$\{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathfrak{F}$ ならば，$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathfrak{F}$

(3) $\mathfrak{F}$ に属する**有限個**の X の部分集合の共通部分はまた，$\mathfrak{F}$ に属する．つまり，$U_1, U_2, \cdots U_n \in \mathfrak{F}$ ならば，$U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n \in \mathfrak{F}$

ここで，開集合の公理 (2) の記号 $\lambda \in \Lambda$ の部分であるが，Λ は X の任意の集合であり，λ の動く範囲でもある．もし可算個 (集合の元が自然数に 1 対 1 に対応できる集合) の U_λ であれば，自然数の集合を N と表すと $\Lambda = N$ として $U_1, U_2, \cdots U_n$ と表されるが，ここでは U_λ の場合は非可算個の場合もあるので，このような表現の仕方になる．可算個，非可算個については，結構奥の深い内容である．たとえば，[13] を参考にしよう．

集合 X の部分集合族 $\mathfrak{F}$(すなわち $\mathfrak{F}$ は X のべき集合の部分集合) が先の 3 つの条件を満たすとき，$\mathfrak{F}$ を X の 1 つの**位相構造**または**位相**という．そして，位相構造 $\mathfrak{F}$ が 1 つ定められた集合 X を**位相空間**といい，

$$(X, \mathfrak{F})$$

または，$\mathfrak{F}$ を明記する必要がない場合は，X で表す (つまり，先の 3 つの条件を満たす集合 X の部分集合族がとれたとき，位相空間になったという)．

$\mathfrak{F}$ に属する X の部分集合を $(X, \mathfrak{F})$ の**開集合**という．つまり，$\mathfrak{F}$ を明記する必要がない場合というのは，特に定義されている開集合がわかっているときである．

位相空間とは結局，集合の元と元のつながりを数学的に定義した集合を導入したものである．この開集合の公理は，近傍の公理と同様に，X の部分集合族を考えることは共通しているのであるが，大きく違うのは，近傍は X の**各点において**近傍の公理を満たすように考えるのであるが (各点において点と周りの点の関係を定義する)，開集合は各点においてではなく，開集合の公理を満たすように X **の部分集合**族を考える (単に点と点の関係を集合を使って定義する) ということである．開集合の公理を満たすようにできた X の部分集合族の元を開集合と名付けるのである．

2.14　先に開集合を定義してから位相空間を定義する

いままでの議論は，近傍を定義してから位相空間を定義し，次に近傍を使って開集合を定義してその開集合の特徴をみてきた．今度は先ほどの p.280 の開集合の公理を先に天下りに定義してから，位相空間を作っていこうと考えるのである．つまり，近づくという概念を与える集合の点と点の関係を，X の部分集合を使って定義しようと考えるのである．

集合に開集合の公理を説明してから位相空間を定義する方法は，ほとんどの位相空間論の本でかかれている方法である．これは個人的な考えであるが，抽象的すぎてイメージがわきにくいし，いきなり感がぬぐえない．点と点のつながりを表す開集合で，近傍の「〜が好き」というようなイメージがわくような具体例も経験上つくることが難しかった．むしろ，いろんな位相空間論の本に掲載されている有限集合における開集合の具体例もパズル的な要素になっているものが多いと私は思う．だからこそ，最初にイメージのわきやすい近傍で位相空間を定義して解説したのもそのためである．

しかし，この本も他の位相空間論の本と例外ではなく，開集合の公理を先に定義して位相空間を定義する流れも説明していこう．集合 X を考えたとき，X の部分集合族を考える．それら部分集合族の中で p.280 の開集合の公理を満たす X の部分集合族 $\mathfrak{I}$ を位相空間というのであった．そして，$\mathfrak{I}$ の

元を**開集合**というのであるが，この開集合の定義には，近傍が任意の点でとれる (含まれる) という意味はない．たいていの位相空間論の本は，距離の入れた位相空間で ε 近傍を利用して開集合を説明して，次に一般の集合に開集合の公理を使った定義をして位相空間をつくるスタイルがほとんどであるが，この方法だとギャップが大きすぎると思うのである．そのギャップを克服するのに，とてつもない労力と忍耐が経験上必要だと考える．

我々は，開集合といえば，任意の点で ε 近傍を含むものと定義されて，近傍を使って開集合をつくることに慣れていた．なんとなく端のない集合というイメージがおぼろげながらにもできていたと思うのであるが，新しく開集合の公理を使って位相空間を定義するとなると，そんなおぼろげながらにできていたイメージが全くもって覆され，急に開集合が抽象的になり，結局開集合って何？ということになりかねないのである．

いずれにせよ，位相空間というイメージは何かもう一度確認しておこう．位相空間を開集合の天下り的な定義で作ったとしても p.216 の「位相空間のイメージ」をもう一度確かめておこう．こんな抽象的な定義でも，「位相空間のイメージ」で述べた位相空間の特徴はしっかりいきていることに注意しておこう．ようは点と点のつながりの集合を数学的に定義するだけである．

それではいろいろ解説するより，まずは開集合の公理を用いて，具体的に位相空間をつくっていこう．

いままで普通に使っていた実数の集合 R に位相構造を入れてみる．R の部分集合を考え，その部分集合が p.280 の開集合の公理を満たすような R の部分集合族を考えればよいのである．

2.14.1　R において開集合の公理を使って位相空間をつくる

R の開集合の例 (有限個の開集合)

$$\mathfrak{R}_0 = \{(-\infty, 1), (-1, 1), (-1, \infty), R, \varnothing\} \tag{2-53}$$
$$\mathfrak{R}_1 = \{(-\infty, 1], [-1, 1], [-1, \infty), R, \varnothing\} \tag{2-54}$$
$$\mathfrak{R}_2 = \{R, \varnothing\}(\text{密着位相}) \tag{2-55}$$

など，こういうふうに定義された R の部分集合族 $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ は，p.280 の開集合の公理を満たすので，R は位相空間となり，それらの元は開集合を名付ける．密着位相の場合，R の開集合は R だけとなる．

この場合，$\mathfrak{R}_0$，$\mathfrak{R}_1$ の開集合は，それらの元に含まれるものしか使ったらいけないということである．

だからこそ，位相空間といえば，この開集合を使いますよというように宣言をしないといけないのであるし，私たちは位相空間を使う前にどんな開集合が定義されているのかを確かめないといけないのである．

次に，いままで何度も登場した，距離空間での開集合が，開集合の公理を満たすことを証明しよう．

R において開集合の公理を満たす例 (任意の点で ε 近傍を含む集合)

「任意の点で ε 近傍を含む集合族 A」(本来，先に開集合の公理を満たすものとして開集合を定義する流れの中で，ε 近傍という近傍を考えそれを使って開集合を定義するのは，いままでの流れに矛盾するかもしれない．だから，ε 集合？を含むものとして次の A を定義すればよい) に $\varnothing$ を加えた集合族 $\mathfrak{F}$ を考えると，それは開集合の公理を満たす．つまり，

$$A = \{U | \forall p \in U \text{ に対して}, B_\varepsilon(p) \subset U \text{ となる } B_\varepsilon(p) \text{ が存在する }\}$$

とおくと，

$$\mathfrak{F} = A \cup \varnothing$$

は開集合の公理を満たす．

【解説 1】

たとえば，R の部分集合には，1 点 $\{-8\}, \{0\}, \{100\}, \cdots$，$[-4, 9)$, $(0, 7) \cup [300, 500], \cdots$，$(6, \infty)$，$\varnothing$ など，点や区間など無限個の部分集合がある．この無限個の部分集合で，たとえば上記の「任意の点で ε 集合を含む集合族」だけを集めたものは，開集合の公理を満たすといっているのである．

【証明】

開集合の公理 (1) は，明らかに成り立つ．開集合の公理 (2) であるが，つまり，$\{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathfrak{F}$ ならば，$\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathfrak{F}$ であることを示す．$\forall x \in \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ に対して，$x \in U_\lambda$ となる，$\lambda \in \Lambda$ が存在する．U_λ の任意の点で，ε 集合 $B_\varepsilon(x)$ を含むので，$\exists\varepsilon > 0$ が存在して，$B_\varepsilon(x) \subseteq U_\lambda \subseteq \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ となるので，$\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ の任意の点で $B_\varepsilon(x)$ を含むので，$\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathfrak{F}$ である．

開集合の公理 (3) であるが，$\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathfrak{F}$ を示そう．U_i の中で 1 つでも $\varnothing$ があれば，$\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} U_i = \varnothing \in \mathfrak{F}$ となり近傍の公理 (3) は成り立つ．次に，$U_i \neq \varnothing$ を仮定しよう．$\forall x \in \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ に対して，$U_1, U_2, \cdots, U_n$ に対して，
$x \in U_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ である．U_i の任意の点で ε 集合を含むので，$\exists\varepsilon_i > 0$ に対して，$B_{\varepsilon_i}(x) \subseteq U_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ が成り立つ．したがって，
$\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\} = \varepsilon$ とすれば，$\varepsilon > 0$ で，$B_\varepsilon(x) \subseteq \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} B_{\varepsilon_i}(x) \subseteq \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ となり，$\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ の任意の点で，ε 集合 $B_\varepsilon(x)$ を含んでいるので，近傍の公理 (3) が証明された．

よって，$\mathfrak{F}$ は開集合の公理を満たすので，R は位相空間となり，この位相空間の開集合といえば ε 集合を含む集合ということがいえた．

【解説 2】

いままでは，任意の点で ε 近傍を含む集合を開集合といっていたが，ここでは「任意の点で ε 集合を含む集合族」に $\varnothing$ を加えた集合族 $\mathfrak{F}$ が開集合の

公理を満たすので，集合族 $\mathfrak{F}$ の元は開集合というといういい方になっていることに注意する．だから，いまの立場においては，R の部分集合で，ε 集合を含むものの集合は p.280 の開集合の公理を満たしていたので，開集合と名前をつけてよいとむしろ考えるべきである．

ここでは，ε 近傍を含む集合族以外にも，開集合の公理を満たす集合族を考え，位相構造を考えてみよう．

R において開集合の公理を満たす例 (開区間を任意の点で含む集合)

これらの理由より，ε 近傍の代わりに，任意の点において次のような開区間 (a, b) を含む含む集合 U の集合

$$B = \{U|\forall p \in U \text{ に対して，} \\ (a, b) \subset U \text{ となる開区間 } (a, b)(a < p < b) \text{ が存在する }\}$$

とおくと，

$$\mathfrak{E} = B \cup \varnothing$$

は開集合の公理を満たす．証明は，先ほどの ε 近傍を含むものとほとんど同じなので，証明は略すがイメージはわくであろう．

【解説】

ここでまず最初に使った開区間という言葉は，普通の意味での開区間で開集合かどうかはまだわからない．これは順序だけで定め得る．すなわち
$(a, b) = \{x|a < x < b\}$，つまり，a と b を含まない a から b までの点の集合という意味である．そして次に $\mathfrak{E}$ が開集合の公理を満たす位相空間となったので，(a, b) の任意の点 x で $(p, q)(a < p < x < q < b)$ となる開区間がとれるから，開区間 (a, b) は R において開集合!になったとなる．

それともう 1 つ注意することがある．それは開区間を使って，開集合の公理を満たすように位相空間をつくろうとしたときに，初心者は次のような勘違いをするときがある．

それは R において「開区間の集合族」と R と $\varnothing$ を加えた集合族 $\mathfrak{E}'$ を考えたときに，これは開集合の公理を満たすと思ってしまうことがあるが間違

いである．つまり，

$$\mathfrak{E}' = \{\text{ 開区間 } (a,\, b) | a < b,\, a,\, b \in R\} \cup R \cup \varnothing$$

は開集合の公理を満たさない．

なぜなら，$(a,\, b),\, (c,\, d) \in \mathfrak{E}'$ であるにもかかわらず，$(a,\, b) \cup (c,\, d)$ は開区間ではないので，$(a,\, b) \cup (c,\, d) \notin \mathfrak{F}'$ だから，開集合の公理 (2) は満たさない．

これをみてもわかるように，単なる開区間の集合だけでは位相空間の開集合には，定義できないのである．

もしどうしても開区間を使って，開集合の公理を満たすような開集合族を考えたければ，上記で定義したような，$\mathfrak{E} = B \cup \varnothing$ を考えるか，もしくは，

$$\mathfrak{E}'' = \text{開区間の和集合 (無限個でもよい)} \cup \varnothing$$

と定義すればよい．このとき，$\mathfrak{E}''$ は開集合の公理を満たすが，開集合 U の基本的な形は，$U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (a_\lambda,\, b_\lambda)$ である．

R において開集合の公理を満たす例 (半開区間を任意の点で含む集合)

今度は開区間 $(a,\, b)$ の代わりに，任意の点において次のような半開区間 $[a,\, b)$ を含む集合 U の集合

$$C = \{U | \forall p \in U \text{ に対して，}$$
$$[a,\, b) \subset U \text{ となる開区間 } [a,\, b) (a \leqq p < b) \text{ が存在する }\}$$

とおくと，

$$\mathfrak{G} = C \cup \varnothing$$

は開集合の公理を満たす．

【解説その 1】

まずイメージをつくってみよう．これは，p.267 の基本近傍の例 $[a,\, a + \delta)\, (\delta > 0)$ と似ているが，この基本近傍の例と同じように，たとえば $[3,\, 5)$ の任意の点 p において，$[p,\, 5) (3 \leqq p < 5)$ を含むことができるので，

この位相空間において半開区間は開集合となる！また，$(3, 5)$ の任意の点 q において，$[q, 5)(3 < q < 5)$ を含むことができるので，この位相空間においても開区間も開集合となる！ちなみに，閉区間 $[3, 5]$ の任意の点 s，たとえば $s = 5$ において，$[5, b)$ の半開区間を含まないので，$[3, 5]$ は開集合にならない．

このように，$\mathfrak{G}$ が位相空間になると，半開区間と開区間は開集合になるということわかるであろう．

【証明】

開集合の公理 (1) について．$\forall p \in R$ において，$[p, b)(p < b) \subset R$ となるので，$R \in \mathfrak{G}$ である．また定義より，$\varnothing \in \mathfrak{G}$ であるので，開集合の公理 (1) は満たす．

開集合の公理 (2) について考える．任意の添え字の集合を Λ とおき，$\lambda \in \Lambda$ に対して，$U_\lambda \in \mathfrak{G}$ とする．このとき $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ の任意の 1 点を p とする．そのときある $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して，$p \in U_{\lambda_0}, U_{\lambda_0} \in \mathfrak{G}$ であるから，
$[a, b)(a \leqq p < b)$ が存在して，$[a, b) \subset U_{\lambda_0}$．よって，$[a, b) \subset U_{\lambda_0} \subset \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$．
したがって，$\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathfrak{G}$ となり，開集合の公理 (2) は満たされる．

開集合の公理 (3) について考える．有限個の U_i を考えるので，$U_i \in \mathfrak{G}(i = 1, 2, \cdots, n)$ とする．$\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ が $\varnothing$ であるなら，$\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} U_i = \varnothing \in \mathfrak{G}$．そこで，$\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} U_i \neq \varnothing \in \mathfrak{G}$ とする．$\forall p \in \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ とすると，どの i に対しても $p \in U_i$ で，$U_i \in \mathfrak{G}$ より，$p \in [a_i, b_i)$ が存在する．$a_1, \cdots, a_n$ は有限個でいずれも p 以下であるから，この中に最大数が存在する．ここで，$A = \max(a_1, \cdots, a_n)$，同様に $b_1, \cdots, b_n$ の中に最小数が存在するので，$B = \min(b_1, \cdots, b_n)$ とする．このとき，$A \leqq p < B$ でこのとき $[A, B)$ に対して，$a_i \leqq A \leqq p < B \leqq b_i$ であるから $p \in [A, B) \subset [a_i, b_i) \subset U_i$ が任意の i について成り立つ．よって，$p \in [A, B) \subset \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ となり，$\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathfrak{G}$ である．よって開集合の公理 (3) も証明され，$\mathfrak{G}$ が位相空間になる．

【解説その 2】

開集合の公理 (2) の証明であるが，U_i を開区間としてみて考えると理解力が増す．この場合，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ はもちろん開区間の和集合であるが【解説その 1】でも述べたように，開区間の任意の点で $[a, b)(a \leqq p < b)$ をとることができるので，開集合の公理を満たすということである．さらに応用したい方をすると，たとえば $\bigcup_{i=1}^{\infty}\left[a-\frac{1}{n}, b\right) = (a, b)$(開区間となる！) も $\mathfrak{G}$ に含まれると認める，つまり，$[a, b)$ も (a, b) も $\mathfrak{G}$ に含まれる位相空間で，$[a, b)$ も (a, b) を開集合と定義した位相空間でもある！ということである．閉区間 $[a, b]$ が $\mathfrak{G}$ に含まれないのは，【解説その 1】でみたとおりである．

R において開集合の公理を満たす例 (無限を含む開区間)

$$\mathfrak{H} = \{(a, \infty) | a \in R\} \cup \varnothing$$

は開集合の公理を満たし，R に 1 つの位相を与える．この場合は，いままでのように，(a, ∞) を任意の点で含む集合として集合を考えなくても，開集合の公理を満たす．

【証明】

開集合の公理 (1) について．$\varnothing \in \mathfrak{H}$ は仮定より成り立つ．R を含むかどうかについては，開集合の公理 (2) を参照．

開集合の公理 (2) であるが，A を R の部分集合とする．$\forall\lambda \in \Lambda$ に対して，$U_\lambda \subseteq \mathfrak{H}$ ならば，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathfrak{H}$ であることを示す．Λ が下に有界でないときは，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(\lambda, \infty) = R \in \mathfrak{H}$ となる．Λ が下に有界のとき，$\inf\Lambda = b$ とすれば，$\forall\lambda \in \Lambda$ に対して $b \leqq \lambda$ であるので，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(\lambda, \infty) = (b, \infty) \in \mathfrak{H}$ となり，開集合の公理 (1) と (2) が成り立つ．

開集合の公理 (3) であるが，有限個の $U_i(i = 1, 2, \cdots, n) \in \mathfrak{H}$ をとる．もし，1 つでも $\varnothing$ を含んでいれば，$\bigcap_{i=1}^{n} U_i = \varnothing \in \mathfrak{H}$ で成り立つ．また 1 つでも U_i の中に R を含んでいれば，R となっている U_k を除いても共通部分は

変わらない．よって，$\forall i$ に対して，$U_i = (a_i, \infty)$ と仮定してもよく，このとき，$a = \max(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ とおくと，$\bigcap_{i=1}^{n} U_i = (a, \infty) \in \mathfrak{H}$ となり，近傍の公理 (3) は成り立つ．

【解説】

よって，この位相空間の場合，$(-1, \infty)$ や $(100, \infty)$ などは開集合になるが，$(a, b) \notin \mathfrak{H}$ であるので，開集合ではない．もちろん，$[3, \infty)$ などは，$[3, \infty) \notin \mathfrak{H}$ であるので，$[3, \infty)$ は開集合ではない．また，単純な開区間の和集合も無限部分を含むので，$a < b$ のとき，$(a, \infty) \cup (b, \infty) = (a, \infty) \in \mathfrak{H}$ となる．これは，

$$\mathfrak{E}' = \{\text{ 開区間 } (a, b) | a < b,\, a,\, b \in R\} \cup R \cup \varnothing$$

で位相空間を定義できないのと少し違ってくる．

R の開集合の公理を満たさない例

R において「$[a, \infty)$ の集合族」と R と $\varnothing$ を加えた集合族 $\mathfrak{E}'$ を考えたときに，先ほどの (a, ∞) は近傍系になったし，p.267 の近傍系 (2-50) で開近傍と定義できたので，これは開集合の公理を満たすと思ってしまうことがあるが間違いである．つまり，

$$\mathfrak{E}' = \{\text{ 半開区間 } [a, \infty) | a < b,\, a,\, b \in R\} \cup \varnothing$$

は開集合の公理を満たさない．これについて説明しよう．ただし，N を自然数の集合とする．

$U_n = \left[\dfrac{1}{n}, \infty\right)$ とおくと，$U_n \in \mathfrak{E}'$ であるが，$\bigcup_{n \in N} U_n = (0, \infty) \notin \mathfrak{E}'$ となり，近傍の公理 (2) を満たさないからである．

【解説】

p.267 の基本近傍系 (2-50) で開近傍と定義できたので，もちろん $[a, \infty)$ の集合族も開集合の公理を満たすだろうと思ってしまう．きちんと説明しておこう．基本近傍の性質を使って，基本近傍系 (2-50) をつくったとき，

$\mathrm{Int}[a,\infty)=[a,\infty)$ であるから R において $[a,\infty)$ は開集合になり，しかも (a,∞) も $\mathrm{Int}(a,\infty)=(a,\infty)$ となるので，開区間 (a,b) も開集合である．もし，

$$\mathfrak{E}'=\{\text{ 半開区間 }[a,\infty)|a<b,\,a,\,b\in R\}\cup R\cup\varnothing$$

の定義だけで，仮に開集合の公理を満たしたとしたら，$\mathfrak{E}'$ の元のみすべてを開集合というので，(a,∞) も開集合になるのに，$\mathfrak{E}'$ には含まれていないとなってしまうのである．もしどうしても $[a,\infty)$ を使って開集合の定義をしたければ，任意の点 a で $[a,\infty)$ を含む集合族 G と $\varnothing$ の和集合の集合族 $\mathfrak{E}''=G\cup\varnothing$ を考えればよい．この場合は開集合の公理を満たす．本当に微妙な違いが開集合の定義ができるかどうかの分岐点になっている．

何度も申し上げたが，基本近傍系の性質を満たしそれが開近傍であってそれを集めたものが開集合の公理を満たすとは限らないのである．基本近傍の性質を満たすことが，すぐに開集合の公理を満たすとは限らないのである．

せっかく？$(a,\infty)(a\in R)$ の集合が開集合の公理を満たすということがわかったので，話はそれるが少し実数の連続性をからめて，次のような集合を考えてみよう．同じような無限を含む開区間の集合でも，次のような無限を含む開区間は開集合の公理は満たさない．

R の開集合の公理を満たさない例

Q を有理数の集合とする．

$$\mathfrak{H}'=\{(a,\infty)|a\in Q\}\cup\varnothing$$

は開集合の公理を満たさない．

【解説】

数列

$$a_{n+1}=\frac{a_n+2}{a_n+1},\,a_1=1 \tag{2-56}$$

を考える．高校時代受験参考書を片手に勉強してきた者にとって，まずは一般項を求めたくなるだろう．しかし，この漸化式の一般項を求める前に，$a_1,\,a_2,\,a_3,\cdots$ を計算すると，

$a_1 = 1$, $a_2 = \dfrac{3}{2} = 1.5$, $a_3 = \dfrac{7}{5} = 1.4$, $a_4 = \dfrac{17}{12} = 1.4166666666\cdots$, $a_5 = \dfrac{41}{29} = 1.4137931034\cdots$, $a_5 = \dfrac{99}{70} = 1.4142857142\cdots$, $a_6 = \dfrac{239}{169} = 1.414201183\cdots$ となるわけであるが，各項は有理数で表されるのは明らかであるが，この有理数はどの数字に近づいていっているだろうか．なんとなく，$\sqrt{2}$ に近付いている感覚はないだろうか．本当に $\sqrt{2}$ に近づいているのか，一般項を求め収束する値を調べてみよう．途中の式は省くが，一般項を求めることは受験勉強をくぐり抜けてきた大学生にとっては，全く難しいことではないであろう．ちなみに一般項は，

$$a_n = \frac{2\sqrt{2}+4}{(-1)^n(1+\sqrt{2})^{2n+1}-1-\sqrt{2}} + \sqrt{2} \tag{2-57}$$

であり，フィボナッチ数列の一般項のようにかなり複雑である．分数の漸化式の解き方については，高度な受験参考書にパターンが必ずといって紹介されているので，受験生時代を思い出しながら解いてみるのもよいであろう．

この一般項を求めることで，

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$$

が証明されて，先ほどの予想が正しいことが証明された．

考えてみよう．**各項が有理数であるのに，極限値は無理数である**とはなんとも興味深い話である．高校時代，あまり考えてみることがなかったことである．高校時代の漸化式の問題とは，一般項を求めることと極限値を求めることが主な内容で，それに終始していた感がある．漸化式であらわされた数列の各項を吟味するということはほとんどなかったはずである (この考えの延長が実数の連続性の話につながる)．

これらの話は全く問題ないように思えるが，証明に使ってみよう．

【証明】

たとえば，$A = \{(q, \infty) | q \in Q, q > \sqrt{2}\}$ に対して，

$$\bigcup_{q \in A} (q, \infty) = (\sqrt{2}, \infty) \notin \mathfrak{S}$$

となるので，$\mathfrak{S}$ は R の位相にならない．

【補足】

こんな証明ははじめて位相空間を学ぶ人にとって気づくはずない？と思う．解答読んでもなんとなく理解できるレベルである．【解説】でも説明したが，有理数の数列で無理数に収束するものが存在することがわかってはじめて作れる問題でもある．

また，第 1 章でも述べたが，収束する数列はあらゆる大きい仕方をしても収束するので，この問題の場合，$q > \sqrt{2}$ となる q の集合を考えているが，先に紹介した a_n の中で $a_n < \sqrt{2}$ となる項もいくつか存在するが，$a_n > \sqrt{2}$ となる数列の項を集めて集合 A を作ればよい．

R の開集合の公理を満たさない例 (閉区間を使う)

$$\mathfrak{J} = \{[a,\, b] \text{ のの和集合 } | a < b,\, a,\, b \in R\} \cup \{R\} \cup \varnothing$$

は開集合の公理を満たさない．

【証明】

この $\mathfrak{J}$ の元は，$U = \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} [a_\lambda,\, b_\lambda]$ と表される．この場合，開集合の公理 (2) を満たさない．なぜなら，$U_n = \left[\dfrac{1}{n},\, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$ とおくと，

$$\bigcup_{n=5}^{\infty} \left[\frac{1}{n},\, 1 - \frac{1}{n}\right] = (0,\, 1) \tag{2-58}$$

である．

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ の意味であるが，これは 0 には決してならないが，0 に近づくという意味であるので，左端は 0 の開区間のとなるわけである．右端も同様に 1 の開区間となる．

ちなみにこれを数学的に証明するとなると，次のようになる．

$\left[\dfrac{1}{n},\, 1 - \dfrac{1}{n}\right] \subset (0,\, 1)$ は，$n = 5, 6, \cdots$ に対して成り立つ．

逆に，$\forall x \in (0,\,1)$ に対して，$\dfrac{1}{n} < x < 1 - \dfrac{1}{n}$ を満たす，つまり，$n > \dfrac{1}{x}$ かつ $n > \dfrac{1}{1-x}$ を満たす n を選べば，$x \in \displaystyle\bigcup_{n=5}^{\infty} \left[\frac{1}{n},\,1 - \frac{1}{n}\right]$ となるので，$(0,\,1) \subset \displaystyle\bigcup_{n=5}^{\infty} \left[\frac{1}{n},\,1 - \frac{1}{n}\right]$ となり，

$$\bigcup_{n=5}^{\infty} U_n = (0,\,1)$$

となる．

よって，閉区間の和集合を元とする集合族は，開集合の公理を満たさない．つまり，閉区間の和集合が R において開集合となることがないことが証明された．もちろん，

$$\mathfrak{J}' = \{[a,\,b] | a < b,\, a,\, b \in R\} \cup \{R\} \cup \varnothing$$

と定義した場合も，開区間のところで注意したように，$[a,\,b],\,[c,\,d] \in \mathfrak{J}'$ に対して，$[a,\,b] \cup [c,\,d] \notin \mathfrak{J}'$ である．

しかし，次のように定義すれば，閉区間を使って定義はできる．これは，基本近傍のところでも述べたように，R の部分集合 A の任意の点 p で，$p \in [a,\,b] (a < p < b) \subset A$ を満たすと定義すれば，このような集合族は各点に近傍系を定義できた．しかし，$\mathrm{Int}[a,b] = (a,\,b)$ となり，$[a,\,b]$ は開集合ではなかった．これは結局任意の点で閉区間 $[a,\,b] (a < b)$ を含む集合とは，開区間や開区間の和集合などで，つまり任意の点で開区間 $(a,\,b)$ を含む集合族を考えると開集合の公理を満たす位相空間と同じ結果になるということである．

2.14.2　開基

いままで開集合の公理を満たすような部分集合族を考え，たくさんの位相空間をつくってきた．私が開集合の公理を使って位相空間をつくる具体例にこだわったことは，**任意の点で開近傍を含む集合族は開集合の公理を満たす**という点である．やはり，開集合の公理を使って位相空間をつくるときも，位

相空間の細胞である近傍という概念はからんでいたのである．しかし気をつけておかないといけないのは，今回は天下り的に開集合を定義するのであるから，近傍という言葉を前面に出したらいけないので，ε 近傍や，基本近傍でしかも開近傍であった (a,b) や $[a,b)$ を心の中で開近傍であるから，それを任意の点で含むようにと思っていればよいことである．そうしたことから，やはり位相空間をつくるときはまずは近傍から勉強した方が絶対に理解しやすいということである．

だからもし近傍を知らずにいきなり開集合の公理を学んで，部分集合族が開集合の公理を満たすように位相空間をつくるときは，無限もからんでくるし，反例もいきなり感をもってしまうのも否定できないと私は考える．

最後に，言葉を簡単に解説しておこう．開集合の公理を満たすような部分集合族は，いままでみてきたように，基本近傍でしかも開近傍を任意の点で含む集合であった．つまり，極端なことをいえば，

$$\text{開集合} = \cup(\text{開!})\ \text{基本近傍}$$

とかける．このような役割を果たす (開!) 基本近傍系を開集合に対してよく**開基**という言葉を使う．ちなみに，開基のきちんとした数学の定義は，位相空間 $(X, \mathfrak{F})$ の開集合よりなる集合族 $\mathfrak{F}^*$ が，**任意の**開集合 $U \in \mathfrak{F}$ とその点 $x \in U$ に対して $x \in V \subset U$ となる $V \in \mathfrak{F}^*$ が存在するとき，$\mathfrak{F}^*$ を位相空間 X の**開基**という．これはなんだか，近傍系から基本近傍系の流れに似ている．開基の定義にあてはめて考えると，任意の点で閉区間 $[a,b]$ を含む集合は開集合になったが，この場合 $[a,b]$ は開集合でなかったので，開基とはならない．だから，$[a,b]$ を使って開集合を考えることはあまり意味のないことである．また，内点，外点などの位相的性質は，距離空間の ε 近傍と同じで，導入する開基によって変わるということである．

コメント

位相空間をはじめて学んだ場合，ほとんどの半開区間などのそれらしい R の部分集合族が開集合の公理を満たして，満たしていないものはないのではないのかと思えてしまう．しかも，開集合の公理を満たさない

ものを証明するとき，反例を使って証明するが，よくそんな反例思いつくなというような，突拍子もなくいきなり出てくる感は否めない．ある程度わりきれるような気持ちをもつことが大事でもある．とにかく，位相空間を最初に勉強したときは，どんな開集合が導入されているのだろうかという気持ちをまず最初に考えられるようにすることが大事である．

また開集合の公理は無限がからんでいるので，$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\{0\}$ や $\bigcup_{n=5}^{\infty}\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]=(0,1)\notin\mathfrak{F}$ などが反例として紹介したが，はじめて学ぶ者にとっては，なかなか気づくものではない．この反例もいきなり感が否めない．

これは私の経験であるが，先ほど最後にも述べたように，やはり位相空間を考えるときは，近傍から定義した方が絶対にわかりやすいと思う．

もう一度述べるが，私たちは，いままで ε 近傍を任意の点でとることのできる集合を開集合としてきたが，そうではなく?，まずは集合の部分集合族を考え，p.280 の開集合の公理を満たすようなの集合族になった場合，その部分集合族の元を開集合と名付け，その集合は位相空間になると考える．開集合の公理を使うまでは，集合は単なる集合で，点と点のつながりはなかったのである．

次に R ではなく，有限集合に位相空間を定義してみよう．これについて私は，有限集合に近傍を定義して位相空間を作った。そしてその定義された近傍を利用することによって開集合を定義した．次はそうではなく，近傍を定義していないでいきなり開集合の公理を満たすように部分集合族を定義して，位相空間を作ってみよう．そしてその開集合を利用して，今度は逆に近傍も定義してみよう．これは先にも述べたが，いきなり感が強く，パズル的にもなってしかも，これは私には近傍のようなストーリーをつくることが難しかった．この本も例外ではなく，他の数学書と同じように，有限集合に位相空間を定義してみる．2.2 の章でも述べたように，位相空間の定義の具体例といえばまず R や R^2 をすぐに思い描き，そしてまた位相空間内での定義

もそのまま R や R^2 の中でアメーバーのような図をかいて考えていくもんだから，位相空間のイメージを R や R^2 だけと考えてしまいがちで，あまりにも当たり前すぎて何が言いたいのかわからなくなることである．大事なことは**集合にも位相空間が定義されるということである．**

2.14.3　有限集合の位相空間

有限集合の位相空間の例

有限集合 $Y = \{a, b, c\}$ に位相構造をいれてみる．Y の部分集合をすべてかき出すと，

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

この中から，p.280 の開集合の公理を満たすように何個か部分集合を選べばよい．必ず選ばないといけないのが，開集合の公理より，$\varnothing$ と $Y = \{a, b, c\}$ である．注意することは，集合 Y に位相構造を入れるので，Y そのもので考えるということで，$Y^c = \varnothing$ であり，a, b, c 以外の点は考えないということである．

たとえば，

$$\mathfrak{F} = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

$$\mathfrak{F}' = \{\varnothing, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

$$\mathfrak{F}'' = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

$$\mathfrak{F}''' = \{\varnothing, \{a, b, c\}\}(\text{密着位相})$$

$$\mathfrak{F}'''' = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}(\text{離散位相})$$

は位相空間となる

$\mathfrak{E} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ は位相空間とはならない．なぜなら，

$$\{b\} \cup \{c\} = \{b, c\} \notin \mathfrak{E}$$

だからである．

p.235 の近傍を使って定義した密着位相 2.12.2 であるが，各点の近傍は $\{a, b, c\}$ のみでしかも開近傍で，各点が密着しているような印象を与えることができた．この近傍を使って定義した位相空間で，開集合のみ集めると，$\mathfrak{F}''' = \{\varnothing, \{a, b, c\}\}$(密着位相) となる．もちろん，これは位相空間の公理を満たしているので，X に位相を与える．この位相は**密着位相**という．逆に，このように $\mathfrak{F}''' = \{\varnothing, \{a, b, c\}\}$(密着位相) から与えて，開集合の公理を使っても定義できるのである．

コメント

これらはパズル的要素が強い．そしてその集合にイメージのわくような意味をもたせることも非常に難しい．一般に，位相空間を語るときは R や R^2 などのユークリッド空間で開集合などを定義してきたのに，開集合の公理を使って位相空間をつくるときに，いきなりこのような有限集合に対して位相空間を定義することが多く，位相空間論の著者はわかりやすく説明しているつもりだろうが，はじめて位相空間を学ぶものにとってみれば，何がなんだかわからなくなるのではないだろうか．そういった私の経験上から，私の場合，有限集合で位相空間を定義するときは，近傍を先に定義して，その近傍に意味を持たせて定義して位相空間をつくったのもそのためである．離散位相や密着位相など近傍を使って定義することによって，意味をもたせて解説することができた．しかし，開集合を定義して位相空間をつくるときは，意味を持たせることが難しいのではないだろうかと経験上考えている．

ただ，大事なことは，

近傍と同じように，開集合の公理さえ満たしさえすれば，開集合は，部分集合の選び方によって，種類と個数が違うことがある

ということである．

そして最後に，1 つの集合にいろいろな種類の開集合がされることがわかったので，それらの特長を生かして，位相の強弱という数学的な定義があるので最後にそれを説明しておこう．

2.14.4 位相の強弱

同じ集合 x に 2 つの位相 $\mathfrak{F}_1$，$\mathfrak{F}_2$ が与えられているとき，2 つの位相空間 $X_1 = (X, \mathfrak{F}_1)$，$X_2 = (X, \mathfrak{F}_2)$ が定まる．

$$\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_1$$

であるとき，つまり，X の $\mathfrak{F}_2-$ 開集合が，X の $\mathfrak{F}_1-$ 開集合になっているとき，位相空間 $X_1 = (X, \mathfrak{F}_1)$ の位相 $\mathfrak{F}_1$ は，位相空間 $X_2 = (X, \mathfrak{F}_2)$ の位相 $\mathfrak{F}_2$ よりも**強い**もしくは**細かい**，または $\mathfrak{F}_2$ は $\mathfrak{F}_1$ より**弱い**もしくは**粗い**という．

位相の強弱の例

集合 X 上の点で定義される位相のうちで最も強いものは離散位相で，最も弱いものは密着位相である．これは明らかである．

位相の強弱の例

p.283 以降，R に対してたくさんの開集合族を定義して，同じ集合 R に位相空間をつくってきた．任意の点で開区間 (a, b) を含む開集合で生成される位相空間 $\mathfrak{E}$(その開集合を $\mathfrak{E}$ 開集合ということにする)，任意の点で半開区間 $[a, b)$ を含む開集合で生成される位相空間 $\mathfrak{G}$(その開集合を $\mathfrak{G}$ 開集合ということにする)，任意の点で開区間 (a, ∞) の形で生成される位相空間 $\mathfrak{H}$(その開集合を $\mathfrak{H}$ 開集合ということにする) である．

このとき，$\forall p \in (a, \infty)$ に対して，$p \in (a, b) \subset (a, \infty)$ とできる．また $[p, b)$ とすると，$p \in [p, b) \subset (a, b) \subset (a, \infty)$ である．よって，この中で最も強い位相空間は $\mathfrak{G}$ である．また位相空間 $\mathfrak{G}$ では，(a, b) も (a, ∞) も $\mathfrak{G}$ 開集

合であるということであるし，位相空間 $\mathfrak{E}$ や位相空間 $\mathfrak{H}$ のもつ性質は位相空間 $\mathfrak{G}$ はそなえているが，逆に位相空間 $\mathfrak{G}$ のもつ性質のあるものは，位相空間 $\mathfrak{E}$ や位相空間 $\mathfrak{H}$ はそなえていないということである．わかりやすい例が，$[a, b)$ は位相空間 $\mathfrak{G}$ の中で開集合でありしかも閉集合でもある (なぜなら $\overline{[a, b)} = [a, b)$ が成り立つし，または $[a, b)^c = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$ は開集合であるからである) が，位相空間 $\mathfrak{E}$ や位相空間 $\mathfrak{H}$ では閉集合にならない．

2.14.5　先に開集合が定義された位相空間で開核の定義

近傍が先に定義された位相空間では，開核の定義は，同じ近傍をもつ点の集合であった．先に開集合が定義された位相空間で開核の定義をするときは，次のように定義されることが多い．つまり近傍という言葉は用いない．

> A を位相空間 X の部分集合とする．この場合，位相空間 X は，開集合の公理を使って定義された開集合がある位相空間である．このとき，A に包まれる X のすべての開集合の和集合のことを X に関する A の開核といい，$\mathrm{Int}A$ で表す．

というようになるがイメージがわきにくい．とりあえず，p.233 の 5 人の集合から作った開集合族，

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} = \{&\{b\}, \{e\}, \{a, b\}, \{b, e\}, \{a, b, e\}, \{b, c, d\},\\ &\{a, b, c, d\}, \{b, c, d, e\}, \{a, b, c, d, e\} = X, \varnothing\}\end{aligned}$$

を使って具体的な例を考えると，たとえば次のようになる．

集合!$\{a, b, d, e\}$ の開核 $\mathrm{Int}\{a, b, d, e\}$ は，

$$\mathrm{Int}\{a, b, d, e\} = \{b\} \cup \{e\} \cup \{a, b\} \cup \{b, e\} \cup \{a, b, e\} = \{a, b, e\}$$

である．

2.14.6　先に近傍を定義するのか，それとも先に開集合を定義するのか

私が位相空間を作ったときは，まず近傍を定義して次に開集合を定義した．その理由は近傍に意味をもたせてイメージさせることが難しくないから

である．しかしいまは開集合が先に定義されていて，近傍という意味はまだ定義されていない．開集合の公理を使って位相空間がつくられたときの近傍はどのように定義されるのだろうか．このヒントについては，p.243 のまとめの部分でも述べられているし，次のように定義する．

位相空間 X の部分**集合** U が x の近傍とは，$x \in W \subset U$ となる開集合 W が存在する．言い換えれば，U が開集合であると (開集合の公理よりすでに X は位相空間であり開集合は定義されている)，$x \in U \subset U$ ということなので，開集合 U は x の近傍であるといういい方もできるし，特にこの場合，開近傍である．つまり，開集合であれば，その開集合はその任意の点の近傍である．また，開集合の公理が定義された段階で，開集合は開近傍にもなっているということである．

この場合，注意することは，開集合の任意の点で近傍がとれる (U が U に属する点の近傍になっている，つまり，$\mathrm{Int}U = U$) という意味ではなくて，あくまでも開集合の公理を満たす部分集合族という条件で作られた開集合である．

ここで問題に思うのは，開集合を先に定義した位相空間と，近傍を先に定義した位相空間は同じになるのかということであるが，これは当たり前であるが同じになる．

これは具体例で考えるのが一番良い．p.279 の開集合の公理を満たす位相空間

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} = \{&\{b\}, \{e\}, \{a, b\}, \{b, e\}, \{a, b, e\}, \{b, c, d\},\\ &\{a, b, c, d\}, \{b, c, d, e\}, \{a, b, c, d, e\} = X, \varnothing\}\end{aligned}$$

を考える．このとき，$\mathfrak{F}$ の元はすべて開集合だから，点を中心とし視点で開集合をみると開近傍と定義した．つまり，a の (開) 近傍は a を含む開集合で，$\{a, b\}, \{a, b, e\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, d, e\}$ となり，同様に b から e の

近傍を考えると，

a の**開近傍**:$\{a, b\}$, $\{a, b, e\}\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c, d, e\}$
b の**開近傍**:$\{b\}$, $\{a, b\}$, $\{b, e\}$, $\{a, b, e\}$, $\{b, c, d\}$, $\{a, b, c, d, e\}$
c の**開近傍**:$\{b, c, d\}$, $\{a, b, c, d, e\}$
d の**開近傍**:$\{b, c, d\}$, $\{a, b, c, d, e\}$
e の**開近傍**:$\{e\}$, $\{b, e\}$, $\{a, b, e\}$, $\{b, c, d, e\}$, $\{a, b, c, d, e\}$

となり，これは p.278 の開近傍の集まりそのものである．ということは，これらの開近傍を含むような X の部分集合はすべてその点の近傍になる．つまり，p.233 の 5 人の各点の近傍ができる．

よって，p.233 の 5 人の各点の近傍から，開集合族 $\mathfrak{F}$ ができて，逆に $\mathfrak{F}$ から p.233 の 5 人の近傍族ができて，近傍から位相空間を作ろうが，開集合から定義して位相空間を作ろうが同じ位相空間ができるということである！

したがって，自分がイメージがしやすい方で位相空間を定義すればよいのである．

2.14.7　先に開集合が定義された位相空間で閉集合の定義

近傍が先に定義された位相空間では，閉集合の定義は，触点を使って定義された．先に開集合が定義された位相空間で閉集合の定義をするときは，次のように定義されることが多い．つまり近傍という言葉はもちろん用いないし，いろいろな「点」を使って定義されることもない．

> A を位相空間 X の部分集合とする．このとき，A が X の閉集合とは，$X - A = A^c$ が X の開集合になるときである．

と定義する．一般の位相空間論の本でも，開集合の公理を定義した後すぐに，補集合を使って閉集合を定義したところで，全く閉じている集合という実感がわいてこない．一番実感のわかない開集合の補集合で定義するのは，前にも述べたように，閉集合はたくさん特徴をもったいろいろな位相的な性質を使って定義される集合であった．そのいろいろな位相的な性質を満たす「点」はこの段階では，まだ述べられていないので，すでに開集合が定義されているので，この定義された開集合を使って閉集合を定義しているのだと

私は考えている．

とりあえずは先ほどの位相空間

$$\mathfrak{F} = \{\{b\}, \{e\}, \{a, b\}, \{b, e\}, \{a, b, e\}, \{b, c, d\}, \\ \{a, b, c, d\}, \{b, c, d, e\}, \{a, b, c, d, e\} = X, \varnothing\}$$

で閉集合を考えよう．単純に $\{a, c, d, e\}^c = \{b\} \in \mathfrak{F}$ より，$\{a, c, d, e\}$ は閉集合．また $\{a, b, c, d\}^c = \{e\} \in \mathfrak{F}$ より，$\{a, b, c, d\}$ は閉集合である．このような作業を続けると，つまり X の閉集合は

$$\mathfrak{F} = \{\{a, c, d, e\}, \{a, b, c, d\}, \{c, d, e\}, \{a, c, d\}, \{c, d\}, \{a, e\}, \\ \{e\}, \{a\}, \{a, b, c, d, e\} = X, \varnothing\}$$

となる．

閉集合は開集合の補集合としても定義されるが，もちろん閉包を使っても定義できる．ここではたとえば，$\{a\}$ が閉集合ということは，$\overline{\{a\}} = \{a\}$ が成り立つということであるが，p.253 で解説したように，b がいる場合，閉包は b と話の合う c, d までついてきて $\overline{\{a, b\}} = \{a, b, c, d\}$ であったが，b がいない場合は，話が合うのは a 一人しかいないという物語をつくることができる (話の合う人がついてこないということである).

2.14.8 閉集合の公理

位相空間は閉集合を使っても定義できる．つまり単なる集合 X に，p.168 の閉集合のまとめにあるような，閉集合の特徴をもった X の部分集合族を考えて点と点のつながりを定義して，位相空間にできるということである．開集合の公理と同じように，次のようになるが和集合の有限個と共通部分の無限個が入れ替わっていることに注意.

閉集合の公理 (文字式を使って)

(1) $X \in \mathfrak{F}$, $\varnothing \in \mathfrak{F}$

(2) $\mathfrak{F}$ に属する**有限個**の X の部分集合の和集合はまた $\mathfrak{F}$ に属する．
つまり，$U_1, U_2, \cdots U_n \in \mathfrak{F}$ ならば，$U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n \in \mathfrak{F}$

(3) $\mathfrak{F}$ に属する**無限個**の X の部分集合の共通部分はまた，$\mathfrak{F}$ に属する．つまり，$\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathfrak{F}$ ならば，$\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathfrak{F}$

閉集合の公理 (2) と (3) について簡単に説明しておこう．p.279 の式 (2-52) と同じように，たとえば

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] = \{0\} \tag{2-59}$$

となるように，閉区間の無限個は 1 点で閉集合になる (これについては，p.361 の区間縮小法の定理を参考にしよう)．また p.292 の式 (2-58) からもわかるように

$$\bigcup_{n=5}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] = (0,\, 1) \tag{2-60}$$

となるので，閉区間の和集合の無限個は開集合になる場合があるということである．

これらを満たすように X の部分集合族がとれたときも X は位相空間になる．つまり，開集合の公理を満たすように定義しても，閉集合の公理を満たすように定義しても同じ位相空間になり，同値であることがわかっている．証明は，[21] などを参考にするとよいであろう．

$\mathfrak{F}$ に属する X の部分集合を $(X, \mathfrak{F})$ の**閉集合**という．

2.14.9 近傍と開集合のまとめ (個人的な見解)

位相空間を理解するためには根気とあきらめない気持ちが大事であるのはいうまでもないが，私が何度も述べたように，近傍という点と点の仲間を理解して，しかもそれを使って位相空間を作り，その位相空間の部分集合が開集合かどうか，閉集合かどうか，その集合の内点，外点，境界点，ハウスドルフ空間などを自分で答えられるようにすることだと思う．

これで，近傍を定義した位相空間と開集合から定義した位相空間の解説を終えるが，この部分集合 A が開集合であるかどうかというのは，結局 $\mathrm{Int}A$ を考えるのが一番手っ取り早いと思う．これが開集合かどうかということを調べるときに，まず開集合の公理を満たすかどうかを調べるのは，結構難しいし，数学的な勘がいるようにも思う．もう一度，基本近傍の例などをみて，$\mathrm{Int}A$ の威力をもう一度復習しよう．もちろん触点など近傍を使って判断されるので，部分集合が閉集合かどうかも，近傍を使って点の集合を考えた方が判断しやすい．また閉集合に関しても開集合の補集合として考えるよりも，閉包を使って考えた方が意味がわかりやすいように思う．

それにまた，内点や外点などの位相的な特徴や数列が収束するかどうかなど，すべて考える近傍の入れ方で変わってくるということである．これをしつこく説明してきた．つまり，

位相空間の解決への道は，近傍に通ず

といってもいい過ぎではないと考える．

なのに，位相空間の定義をするときは，ほとんどの本が開集合の公理から説明することが多い．なぜなのか私にはわからない．開集合の公理の方がシンプルであるからと説明する位相空間の執筆者も多数おられるが，経験上メリットが少ないように思えた．そもそも距離空間で開集合を定義したときに，ε 近傍を任意の点で含むものとして，近傍を使って定義したにもかかわらず，いきなり近傍も使わずに，いきなり開集合の公理を満たす X の部分集合を満たすものといわれても，初心者にとって何のことかさっぱり分からないと思う．

ただいえることは，位相空間をつくるというのは，まず最初に各点に近傍を定義して点と点のつながりが定義された集合ということを述べた．これは各点において点のつながりを考えて位相空間をつくるだけでなく，開集合や閉集合の公理を満たすような集合の部分集合族を使って，点のつながりを定義してもよいということである．

つまり，集合 X にどんな特徴をもった集合で点と点のつながりを定義しようと考えたのが位相空間なのである．それは，近傍を使ってもよいし，開

集合を使ってもよいし，閉集合を使ってもよいという意味である．それらはどれから定義しても同じ位相空間ができるのである．

そしていままで学んできたように，位相空間を勉強するときの心構えとして,「位相空間 $(X, \mathfrak{F})$ において」とかいてあれば，X に開集合が定義されていて，どういう種類の開集合が定義されているのか，またどういう種類の近傍が各点に定義されているのかを考えながら数学書を読む習慣をつけよう．開集合の公理を満たすように集合族を考えるときも，近傍と同じで開集合の公理を満たすように，数と種類を指定するのである．よって同じ集合にもいろいろな開集合が定義されるというところがポイントである．

いろいろな近傍を導入して，近傍を使ったハウスドルフ空間などの空間の特徴も述べた．本来ならば分離公理などの位相空間の特徴も述べるべきなのであるが，位相空間とはどういうアイデアなのかにしぼって解説している本ではより専門的になるので，他の位相空間の本を参考にしてほしい．位相空間を定義したからには，第 1 章の $\varepsilon - m$ 論法の延長である，連続性を語らずにはおられない．連続写像は，位相空間のつながりの細胞部分である，近傍または開集合を使って定義される．次の節では連続写像を，イプシロンデルタ論法を使って解説しよう．

2.15　連続写像

連続写像，つまり連続な写像．連続とは何か，写像とは何か．これらをきちんと数学的に定義しておかないといけない．連続写像を述べる前に，まずは写像についてきちんと定義しておこう．

2.15.1　写像と関数

写像は，90 年代初頭まで高校の『代数・幾何』という教科書に，ある程度は述べられていた (筆者もその世代である)．2014 年現代の高校の数学の教科書には，写像という言葉はでてこない．大学に入ってはじめて学ぶ概念である．

まずは関数について復習してみよう．中学時代の比例・反比例，1 次関数，

2 次関数から高校時代の 3 次関数，指数関数，三角関数などである．中高時代までの関数は,「ともなって変わる量 x, y があり，x の値を 1 つ決めると y の値が 1 つに定まる」というものであった．これは，関数というものが，ともなって変わる量 x, y の変化の様子を表す概念を強調した考え方を意味している．つまり，関数とは「変化」という**動的な視点**が含まれていた．

これら中高時代に学んだ「関数」の動的な視点ではなく，x と y の「対応」という**静的な視点**に目を向け，このような視点でみた関数の概念を一般的に**写像**という．**集合 X の任意の点 x に対して，その相手である集合 Y の元 y がただ 1 つに決まっている**ということである ([13, p.41] 参照).

ここで，集合 X の $\forall x \in X$ に対して，集合 Y の元 y がただ **1** つに定まっているとき，この定め方を X から Y への**写像**という．一般に写像を表す記号として，

$$f, g, h, \cdots$$

などを使う．

元 $x \in X$ に対して，1 通りに定まる元 $y \in Y$ を $f(x)$ とかき，

$$f \text{ が写像である} \iff x_1 = x_2 \quad (x_1, x_2 \in X) \text{ ならば } f(x_1) = f(x_2)$$

である．$f(x)$ を f による**像**といい，f は x を $f(x)$ に**写す**または x に $f(x)$ を**対応させる**という．集合 X から集合 Y への写像 f のことを

$$f : X \to Y$$

と表す．さらに詳しく

$$f : X \to Y; x \mapsto f(x)$$

のように表す場合もある．X は f の**定義域**または**始域**といい，Y は f の**終域**といわれる．

さて,「写像」と「関数」の使い分けであるが，先ほど述べたように,「静的」「動的」という抽象的な違いよりも，X, Y が実数の集合 R や複素数 C(またはそれらの部分集合) である場合に，写像ではなく「関数」という言葉が用

いられることが多い．特にこの本では，全く同じ意味で使うことにすることにする．

写像の例

高校時代に使ってきた，1 次関数は写像という言葉を使って，次のようにかき表される．つまり実数の集合 R から実数の集合 R への対応ということで，この対応を f という記号を用いて，

$$f(x) = ax + b \qquad (\text{ただし}, a \neq 0, b \in R)$$

と定義し，

$$f : R \to R; x \mapsto ax + b$$

と表す．

写像の例

三角関数も同様にして，実数 x を実数 $\sin x$ に対応させる g を

$$g(x) = \sin x$$

と表し，

$$g : R \to R; x \mapsto \sin x$$

と表す．

写像の例

写像とはあくまでも，集合から集合への対応なので，なにも R から R への写像のみだけではない．X を日本人の集合，$Y = \{$ 北海道，青森，岩手，$\cdots$，沖縄 $\}$ を都道府県の集合として，各日本人を現住所の都道府県に対応させるのも写像の 1 つである．

さて，R から R への写像が定義されたとき，私たちはどういうイメージを思い浮かべるであろうか．写像とはいえ関数と定義は同じなのであるから，たとえば $g(x) = \sin x$ は xy 平面にえがかれた図 2-41 のようなグラフを思い浮かべるであろう．

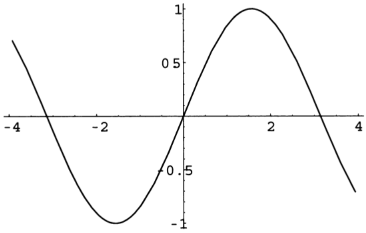


図 2-41 写像 $g(x) = \sin x$ のグラフ

これは大学 1 年まで慣れ親しんだ xy 平面や xyz 空間に関数を描くということに慣れた学生にとって無理もないことである．しかしもう 1 度写像の定義をみてみよう．写像 g は，実数を実数に対応させるものであるから，イメージとして数直線上の点を数直線上の点に写すものなので図 2-42 のようなイメージをもたないといけないのである．同じ写像であっても「位相空間論で写像」と「グラフを描くという写像」のギャップを埋めることはそう難しいことではないが，誰かにアドバイスされるまではなかなか意識できないものである．

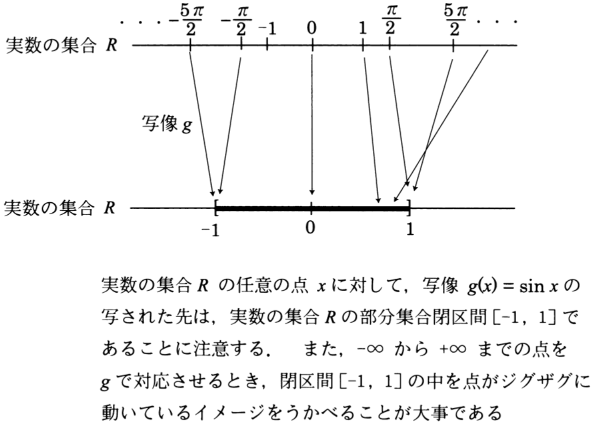


図 2-42 写像 $g : R \to R; x \mapsto \sin x$ のイメージ

さて先ほど，言葉としてでた**グラフ**の数学的な定義をきちんとしておこう．

グラフ

写像 $f: X \to Y$ に対し，集合 X と Y との直積 $X \times Y$ の部分集合

$$\{(x,\, f(x))|x \in X\}$$

は，写像 f の**グラフ** という．

ここで，X と Y の**直積**とは，$x \in X, y \in Y$ に対して，順序を考慮に入れた組 (x, y)(つまり，x と y を入れ替えてはいけないということ) からなる集合をいい，

$$X \times Y$$

で表され，

$$X \times Y = \{(x,\, y)|x \in X,\, y \in Y\}$$

である．

私たちが高校までかいてきた関数 $f(x)$ の様子は，数学できちんと定義される**グラフ**といわれる $R \times R = R^2$ の部分集合として考えていたのである．高校時代も関数をかくときはグラフという言葉を使った．そのグラフは数学的な言葉を使って，きちんと定義できたのである．

これからは，集合から集合の写像という観点から，同じ関数の表記であっても図 2-42 のようなイメージを描くことを癖づけよう．つまり，**グラフと写像を分けて考えていくということである**．

もう一つ写像の具体例を解説しておこう．この解説は，後に述べる連続写像の定義のイメージに役に立つ．

写像の例 (ちぎれている写像)

R から R への写像 $f: R \to R$ を

$$f(x) = \begin{cases} x + 10 & (x > 5) \\ x + 9 & (x \leqq 5) \end{cases}$$

で定義する．これをグラフで表すと，図 2-43 のようになるし，

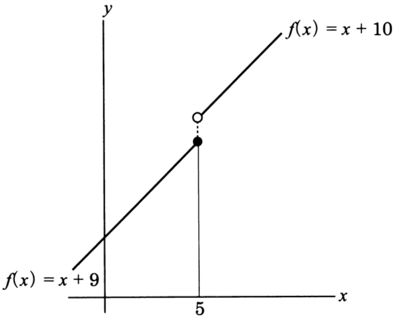


図 **2-43**　グラフの観点からイメージする

これを数直線 R の点を数直線 R に写すという写像という観点からイメージすると図 2-44 のようになる．

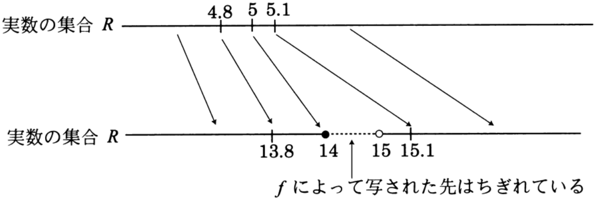


図 **2-44**　写像の観点からイメージする

図 2-43 のグラフをみても，図 2-44 をみても，ちぎれているということは一目瞭然である．つまり写されることによってちぎれてしまっているということである．このちぎれている写像のことを数学用語で不連続な写像 (関数) という．

さて，いろいろな写像を具体的にみたところで，写像に関して重要な事柄がいくつかあるのでここで解説をしておこう．今後の展開に必要になってくる．

定義：全射・単射

写像 $f : X \to Y$ に対して，集合

$$f(X) = \{y | y = f(x), x \in X\}$$

は f の**像**または**値域**といわれる．

写像 f は，その像が Y と一致するとき，すなわち

$$f(X) = Y$$

となるとき，**全射**といわれる．言い換えれば，f が全射であるのは，

$$\forall y \in Y \text{ に対して}, f(x) = y \text{ を満たす元 } x \in X \text{ が存在する}$$

ときである．全射という言葉は，Y の全部の元が f の像であることを意味している．

具体的な例でいうと，p.308 の図 2-42 は，終域の方の R の任意の点，たとえば $5 \in R$ に対して，$\sin x = 5$ となる，定義域の R の点 x は存在しない．よって，図 2-42 の写像 g は全射ではない．また，p.307 の節の例 $y = ax + b$ は，終域の方の R の任意の点 $y \in R$ に対して，$x = \dfrac{y-b}{a}$ となる定義域の R の点 x が存在するので，f は全射である．p.307 の各人を現住所に写す写像は，全射かということであるが，これは条件を付けると全射になる．たとえば，日本人の集合 X に対して，X を日本在住の日本人とすれば各県に対して必ず日本人がいるが，X を単なる日本人の集合としたときは，たとえば北海道を現住所とする日本人はいるかと考えたときに，全員が海外に住んでいる場合があるので，全射にならないということである．

次に，写像 $f : X \to Y$ において，$x_1, x_2 \in X$ とする

$$x_1 \neq x_2 \in X \text{ に対して}, f(x_1) \neq f(x_2)$$

が成り立つとき，あるいは対偶をとって，

$$f(x_1) = f(x_2) \text{ ならば}, x_1 = x_2 \text{である}$$

が成り立つとき，**単射**といわれる．$f(x) \in Y$ に写される X の元の数が**単数(ただ一つ)** という意味である．

具体的な例でいうと，p.308 の図 2-42 は，$\frac{\pi}{2} \neq \frac{5\pi}{2}$ に対して，$\sin\frac{\pi}{2} = \sin\frac{5\pi}{2} = 1$ なので，g は単射ではない．また，p.307 の例 $y = ax + b$ は，$x_1, x_2 \in R$ をとり，$x_1 \neq x_2$ と仮定する．このとき，

$$(ax_1 + b) - (ax_2 + b) = a(x_1 - x_2) \neq 0$$

となるので，$f(x_1) \neq f(x_2)$ である．よって，f は単射である．また，p.307 の例「日本人と県の対応の写像」は，2 人の日本人に対して現住所が同じ県であることが普通にあるので，単射ではない．

さて，写像 $f(x) = ax + b$ は，以上の理由より，全射であり単射である．こういった写像を**全単射**，または **1 対 1 の写像**という．

逆写像

全単射 $f : X \to Y$

が与えられたとき，$\forall y \in Y$ に対して，$f(x) = y$ となる $x \in X$ がただ 1 つ存在する．y にこの x を対応させるとき，Y から X への写像が定まる．この写像を**逆写像**といい，

$$f^{-1}$$

で表す．

もう一度，写像について考えてみよう．つまり，f が全単射であれば，$\forall y \in Y$ に対して，X の 1 つの元 x を定めることができるので，Y から X の写像 f^{-1} が定義できるということである．

以上で，写像の解説を終える．連続写像を定義する前に，高校の連続関数の定義を再確認しよう．

2.15.2　連続写像の定義をする前に，高校の連続性の復習

まずは，高校の教科書に戻って，高校の範囲の連続性の定義を確かめてみよう．高校は，写像を関数という言葉で扱い，対応を**グラフ**という形で図に表してきた．よく使われた，$f(x) = x^2$ という関数を，実数の 1 つの値を 1 つの値に対応させ，それをグラフで表したらつながってるので，連続である

としてきたのである．高校までの教科書には，もちろん位相空間 R という表現は使われていない．ただつながっていれば，連続であると直感的に認めてきたのである．具体的な計算として右極限値と左極限値が一致していれば連続であるとしてきた．つまり関数と極限という言葉のみで連続性が議論できたのである．近傍や開集合という言葉が出てこなかったので，点の周りをまとめて写すという考え方はできなかった．

高校の数学 III の教科書で，関数の連続性の定義を確認してみると，極限値を用いて次のように定義した．

高校の教科書における連続性の定義

一般に，関数 $f(x)$ において，その定義域の x の値 a に対して，$\lim_{x \to a} f(x)$ が存在して，かつ

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つとき，関数 $f(x) =$ が $x = a$ で連続であるという．このとき，$y = f(x)$ のグラフは $x = a$ でつながっている

となっている．また，関数 $f(x)$ がその定義域の x の値 a で連続でないとき，$f(x)$ は $x = a$ で不連続であるという．このとき，$y = f(x)$ のグラフは $x = a$ で切れている．この高校の教科書の連続性の定義には，先ほども述べたが，近傍という言葉が出ていない．計算するときは右極限値と左極限値が等しければ連続であるとした．それでは，何問か高校の復習をしてみることにしよう．まずは，p.310 で解説した関数について考えてみよう．

高校の連続性の復習

$$f(x) = \begin{cases} x + 10 & (x > 5) \\ x + 9 & (x \leqq 5) \end{cases}$$

は，p.310 の図 2-43 をみてもわかるように，$x = 5$ のところでグラフはちぎれている．これを高校の連続性の定義にしたがって証明してみると，右連続性は $\lim_{x \to 5+0}(x + 10) = 15$，左連続性は $\lim_{x \to 5-0}(x + 9) = 14$ となるので，右連続性 $\neq$ 左連続性 となり，この関数は $x = 5$ で不連続となる．これが，高校における不連続性の証明である．

次に，高校の受験参考書には必ずといっていいほど掲載されている，連続性を確認するのに適した有名な問題を考えよう ([1, p.15-23] を参照).

高校の連続性の復習

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

の原点における連続性.

【証明】

連続性の定義に従って，調べる.

$x = 0$ で連続であるとは，$x = 0$ の右側極限値と，左側極限値が同じであることだった．たとえば，右側極限値で考えたとすると，$x \neq 0$ のとき，x がいくら 0 に近づいても

$$x = \frac{1}{n\pi} \text{ のとき，} f(x) = \sin n\pi = 0$$
$$x = \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi} \text{ のとき，} f(x) = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi = \pm 1$$

であるので，これはつまり，x を $\dfrac{1}{\pi} = 0.31831\cdots$，$\dfrac{2}{3\pi} = 0.212207\cdots$，$\dfrac{1}{2\pi} = 0.159155\cdots$，$\dfrac{2}{5\pi} = 0.127324\cdots$，$\cdots$ と 0 に近づけていくにつれて，0，-1，0，$+1$，$\cdots$ と振動し，$f(0) = 0$ に収束しない．よって，$x = 0$ で連続ではない．図 2-45 を見れば明らかである.

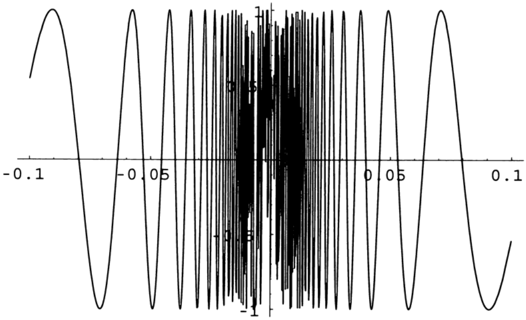


図 2-45 グラフで表現した $y = \sin\dfrac{1}{x}$ の原点の周りの様子

つまり図 2-45 を見てもわかるように，$x = 0$ の周りで振動して，0 に収束していない．グラフを見る限りでは，$x = 0$ でつながっているように見えるが，あくまでも見えるだけであって，振動し収束していないので不連続なのである．

高校の教科書に掲載されている連続性の定義では，指導者が x が a にあらゆる近づけ方をしても $f(x)$ は $f(a)$ に近づくということをきちんと説明しておかないと，定義をみただけでは普通はわからないであろう．この 0 への $\dfrac{1}{\pi}$，$\dfrac{2}{3\pi}$，$\dfrac{1}{2\pi}$，$\dfrac{2}{5\pi}$ という近づけ方に抵抗がある人がでてくるかもしれない．今まで何気なく当たり前のように使っていた「**近づける**」という意味は，実は非常に意味が深いのである．これは，p.63 で数列の極限のときにも述べたとおりである．

問題 2.15.2 の 0 への近づけ方は，$y = \sin\dfrac{1}{x}$ の特徴を利用した近づけ方で，この場合 0 に収束しないので，0 に近づかないという．言い換えれば，

$$\frac{1}{\pi},\ \frac{1}{2\pi},\ \frac{1}{3\pi},\ \frac{1}{4\pi},\cdots$$

と 0 に近づけていくと，0，0，0，$\cdots$ となり，0 に収束しているようにとらえることができるが，このように特別な場合だけ 0 に収束しても，収束するとはいわないのである．この考えは，数列の極限と全く同じ考えである．1

変数関数の場合,「近づける」という意味は，(1) あらゆる方向 (右方向と左方向)，(2) あらゆる近づけ方の 2 つの意味が含まれていて，本来ならば，この 2 つを使って収束性を調べて連続性を証明するのであるが，(2) のあらゆる近づけ方をすべて調べるのは不可能であることは明らかであろう．言い換えれば，高校までの近づけ方というのはまさに「直感」をたよりにしていたということである．たまたま，有名な関数 $y = \sin\dfrac{1}{x}$ の原点での連続性を使って収束しないことを証明したが，この関数はあまりにも有名なのでそういう特別な近づけ方が簡単に紹介できたのであって，普通の人はなかなか気づくものではない．直感を頼りにしてきた連続性の証明を，きちんと証明しようと思ったらどうすればよいかというと，実は ε-δ 論法を使うのである．ε-δ 論法はあらゆる近づけ方を解決して連続性を示してくれるのが特徴である．

同じような関数でも，次の関数は原点で連続である．

高校の連続性の復習

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

の原点における連続性．

【証明】

基本に戻って調べてみる．まず，$x \neq 0$ として考える．右側極限，つまり $x > 0$ のとき，

$$f(x) - f(0) = f(x) - 0 = x\sin\frac{1}{x} \leqq x$$

つまり，

$$0 < f(x) - f(0) = x\sin\frac{1}{x} \leqq x$$

となる．

よって，x を正の方から 0 に近づけると，はさみうちの定理より，

$$\lim_{x\to 0+0}\{f(x)-f(0)\}=0$$

左側極限，つまり，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0-0}\{f(x)-f(0)\} &= \lim_{x\to 0-0} x\sin\frac{1}{x}\\ &= \lim_{x\to 0+0}(-x)\sin\frac{1}{(-x)}\\ &= \lim_{x\to 0+0} x\sin\frac{1}{x}=0\end{aligned}$$

よって，右側極限 = 左側極限 =0 なので，$x=0$ で連続である．

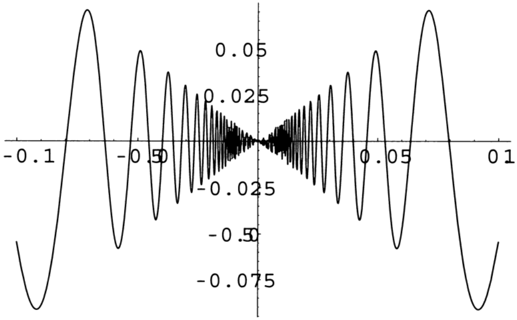


図 2-46　グラフで表現した $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ の原点の周りの様子

図 2-46 を見てもわかるように，$x\to 0$ としたら，この場合，$f(x)\to 0$ になっている (0 に収束している).

【解説】

$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$，$f(0)=0$ の原点で連続であることが証明されたが，先ほど説明した「あらゆる近づけ方」も言えて連続性が証明できたのか，不安になる読者も出てくるだろうが，実はこの「あらゆる近づけ方」も含めて証明

できているのである．なぜなら，たとえば右連続の証明で，式

$$0 < f(x) - f(0) = x\sin\frac{1}{x} \leqq x$$

の部分で，この式の意味は x を $\dfrac{1}{\pi}$，$\dfrac{2}{3\pi}$，$\dfrac{1}{2\pi}$，$\dfrac{2}{5\pi}$，$\cdots$ と 0 に近づけようが，$\dfrac{1}{\pi}$，$\dfrac{1}{2\pi}$，$\dfrac{1}{3\pi}$，$\dfrac{1}{4\pi}$，$\cdots$ と 0 に近づけようが，$x \to 0$ のとすると，はさみうちの定理より $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ と $f(x) = 0$ の距離がいくらでも小さくなる，つまり $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ は $f(x) = 0$ に収束することをいっているのである．つまり,「あらゆる近づけ方」をいえて証明できているのである．

もう一度，高校の極限値を用いた連続性の定義で何が困るのであろうか考えておこう．なぜ $\varepsilon - \delta$ 論法が必要なのであろうか．大学新入生にも説得できる直感的なアドバイスとしては，具体的でない関数 $f(x)$ において,「x が a の近づくとき，$f(x)$ が $f(a)$ に近づく」ということはどういうことがいえたときか，また逆に，具体的でない関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続でないというのはどういうことがいえたときかなど，残念ながら高校の範囲では答えられないということである．これは，p.15 で，数列の極限のところで述べたことと全く同じことである．高校までの連続性は，必ず具体的な関数があって，それをグラフにかいて証明していたということである．

そしてまた位相空間を学んでしまえば，それだけの理由だけではなくなる．絶対値以外の距離関数でつくる近傍に対しても，連続性が定義されないといけない．近傍が定義されれば，連続写像を定義できるということを述べた．距離が入っていない近傍を導入した位相空間でも連続写像を定義できるので，具体的な関数のグラフで，極限値用いた連続性の定義だけでは，一般の位相空間での連続写像の定義が難しくなるのである．

以上のような理由から，高校の数学から発展して，具体的でない関数 (写像)$f(x)$ が連続であることを式で表すことを考えよう．また具体的でない関数 (写像)$f(x)$ が，どういうことがいえたとき連続でないといえるのかも同様にして式で表すことを考えよう．これが，連続写像の定義につながる．

2.15.3 連続性について

高校の連続性の復習が終わった．なぜ高校の連続性の定義だけではいけないのかも述べた．連続写像の「写像」の部分を定義して解説した．

次は，位相空間の学習において避けて通れない「連続写像」の「連続」の解説である．写像は，**ある 1 つの値 (1 つの点) を写す**という定義であるにもかかわらず，$f(x) = ax + b$ や $g(x) = \sin x$ をグラフに表してみると見た目はつながって見える．つながっているように見えるので，この写像 (関数) は連続であるという (1 つの点を 1 つずつ対応させているにもかかわらず，f の像をグラフで表してみるとつながっているように見えるのである)．

連続イメージは,「つながっている」ということである．この「つながっている」という言葉を数式でどう表現するかということである (数学的にどう定義するかということである)．これをきちんと定義しておかないと，つながっているという連続なグラフを，数学的に証明しようと思うと，グラフにかいてみるとつながっているように見えるから連続であるといったことになってしまい，数学的に証明されたわけではないことになる．

写像でつながっているとはどういうことか (逆に，p.310 の図 2-44 をみてもわかるように，写ることによってちぎれてしまうのが不連続な写像ということができる)，以下解説して連続写像をきちんと数学的に定義していこう．

ここでポイントはつながりを考えるときは，少なくとも写された点，つまり像の点と点の関係が必要になってくる．1 点のみの考えでは解決できない．つまり，1 点のみしか扱えない写像の定義では，つながっているかどうかは (連続であるかどうかは) 解決できないのである．

集合で点と点の関係とは何であろうか．それは近傍である．ここで，単なる集合に近傍を導入することによって，像の点と点の関係が数学的に述べられるのである．これはつまり，**単なる集合が位相空間になったことを意味する．連続な写像を定義するときには，近傍または開集合が定義された位相空間でないと定義できないということである．**

もう一度確認しておくと，いままでの写像の議論では，集合しか扱っていなかった．つまり，R は単なる実数の集合として扱われていることに注意．

絶対値など 2 点間の距離 (ユークリッドの距離) がすでに入っていると思いがちであるが，この距離を使って近傍を定義しますという宣言をしないといけなかったことを思い出してほしい．宣言してようやく定義した距離が使えるわけである (使う距離はユークリッドの距離とは限らない)．R が単なる実数の集合であるといわれても，大学 1 年まで，R や R^2 で普通に絶対値を使ってきた学生にとってみれば，何もいわれなければ，絶対値などの距離を使ってしまうのも無理がない．位相空間を学習したのであれば，これから意識すればいいことである．

f は実数の集合 R から R への写像

$$f : R \to R$$

から f は位相空間 R から位相空間 R への写像という表現に変わり

$$f : R \to R : R \text{ は位相空間}$$

となってはじめて連続写像が定義できるのである．**集合から集合への写像に対する概念が，位相空間から位相空間への連続写像である**と考えたらよい．

それでは，単なる実数の集合 R にどのような近傍を定義するのか．これは離散位相であるような近傍をとったり，密着位相となるような近傍をとったり，距離を導入して近傍をとったり (ε 近傍を考えたり)，p.263 の節 2.12.11 のような近傍を考えたりと無限にある．いちいち各近傍において議論していればきりがない．そこで，なんといっても一番議論しやすいのが，ユークリッドの距離を使った (つまり，絶対値で 2 点間の距離を定義) ものが，一番親しみがわきやすいし，イメージしやすいので，以下特別に断らない限り，実数の集合 R にユークリッドの距離を導入して，各点の近傍を考えていこう．このように，集合から距離を定義した位相空間にと，新しい概念を少しずつ積み上げていくという心構えが大事である．

そして最後に一般の距離を導入した距離空間での連続写像の定義，さらに距離ではなく，一般の近傍を定義した位相空間に連続写像を定義しよう．実は，絶対値を使ったユークリッドの距離が導入された近傍の連続写像の定義を理解するだけで，これらの一般化された位相空間の連続写像も同じように

定義でき，すんなり理解できるのである．たとえば，S^2(球面) に近傍 (開集合) を定義して，位相空間にすれば

$$f : S^2 \to R^2$$

というような連続写像を考えられるようになるということである．

以下，連続写像を定義するのであるが，高校までは，**関数をグラフに表して考えた**ということで (xy 平面の部分集合として表現した)，集合 R から集合 R という概念がなかった．写像 (関数) という概念は，ある集合からある集合に写すということが強調されていることに注意する．そうであるから，まずはいままで出てきたいくつかの関数のグラフを，R から R へ写すイメージ図にかえてみよう．

1 次関数の写像という観点からのイメージ図

$$f : R \to R; x \mapsto ax + b$$

ここでは，$f(x) = 2x + 1$ としている

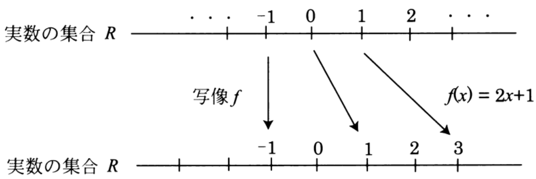


図 2-47　1 次関数の写像という観点からのイメージ図

写像という観点からのイメージ図

$f : R \to R$ として

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

を考える．

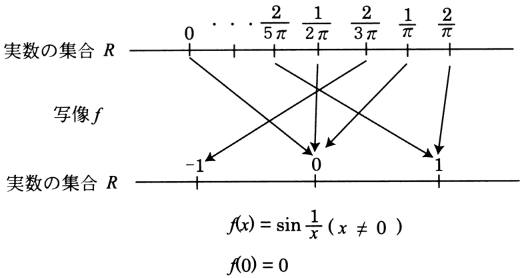


図 2-48　写像という観点からのイメージ図

写像という観点からのイメージ図

$f : R \to R$ として

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

を考える.

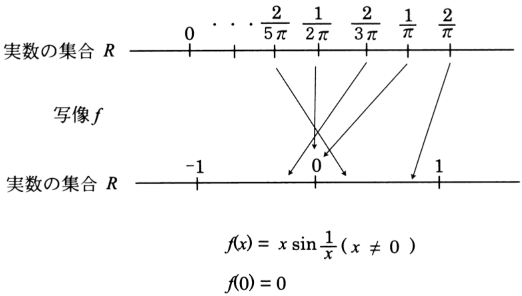


図 2-49　写像という観点からのイメージ図

不連続な写像のイメージ図

これは，p.310 の図 2-44 をもう一度確認してもらいたい．不連続な写像というのは，つながっていたものが，写すことによってちぎれてしまうという

ことである.

以上で，連続性の定義ができる準備が整った．これらの，R から R への写像 f のイメージ図を利用して，連続写像の定義をしよう.

2.15.4　連続写像の定義と $\varepsilon-\delta$ 論法の定義

写像でつながって写る (連続) とはどういうことか，ちぎれて写る (不連続) とはどういうことか，近傍を用いて考えてみよう．一言でいえば，写像 f が $x=a$ で連続とは，a の近くの点すべてが，$f(a)$ の近くにすべて写るということである．しかし，この「近い」という言葉も主観的な言葉であった．だから「a の近くの点すべて」という表現は「a の近傍に属する点すべて」と表現を変え，また「$f(a)$ の近くにすべて写る」という表現は,「点 $f(a)$ の近傍に属するように写る」といういい方に変える．つまり，a の近傍に属する点すべてが f によって，$f(a)$ の近傍に属するように写るとき，f は連続というのである．これを記号で表すと，a の δ 近傍を $B_\delta(a)$ とし，$f(a)$ の ε 近傍を $B_\varepsilon(f(a))$ とすると，

$$\forall x \in B_\delta(a) \to f(x) \in B_\varepsilon(f(a)) \tag{2-61}$$

または，近傍を用いて表すと

$$f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \tag{2-62}$$

ということである．それぞれの ε 近傍で，δ と ε の 2 種類を使ったのは，長さが同じとは限らないからである．しかしこの表現では f が 100 %連続であるという保証はないのである．近いか遠いかを判断する δ や ε の長さに客観性がないからで，式 (2-61) だけの条件だと，次のようなちぎれている場合でも (不連続の場合でも)，式 (2-61) は成り立ってしまう．式は，

R から R への写像 $f : R \to R$ を

$$f(x) = \begin{cases} x+10 & (x > 5) \\ x+9 & (x \leqq 5) \end{cases}$$

を使おう.

$a = 5$ に対して，$\delta = 1, \varepsilon = 4$ とすれば，確かに

$$f(B_1(5)) \subset B_4(f(5))$$

となっている．この包含関係の意味は，$\forall x \in B_1(5)$ に対して．$f(x) \in B_4(f(5))$ ということで確かに図 2-50 を見るかぎり成り立っているが，$f(5) = 14$ のところでちぎれている．

図 2-44 のようになる．

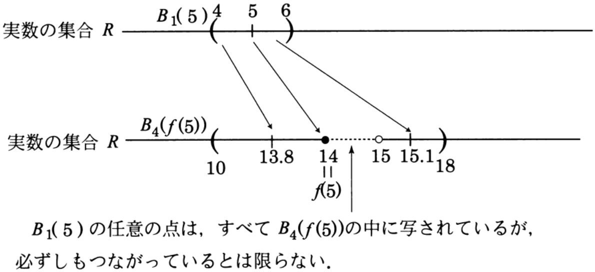


図 2-50 ちぎれているにもかかわらず $f(B_1(5)) \subset B_4(f(5))$ が成り立つ

だから条件 (2-61) だけでは連続とはいえないのである．だからこれがいえれば 100 %連続である (つながっている) という連続の特徴をもう一度考えよう．つまり，100 %連続であることがわかっている，その特徴を式で表したらどうなるのかということを考えよう．それが連続の定義であるし，$\varepsilon - \delta$ 論法なのである．この考えは，収束する $\varepsilon - m$ 論法と非常に似ている．

先ほどの議論でどこに不備があるかというと，どんなに a に近い近傍を考えても (どんなに小さい δ をとってきても)，ε を大きくとると，不連続であっても $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$ とできてしまうことである．逆に，不連続であれば ε が小さければ，δ をどんなに小さくとってみても，

$$f(B_\delta(a)) \not\subset B_\varepsilon(f(a))$$

となることがあるということが不連続の特徴である．

大事なことは，つながって写る保証 (連続写像の特徴) とは，**その結果に注目して**，ε がどんなに小さくても，$B_\delta(a)$ に属するすべての点 x は，

$f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$ とできる，そのような a の近傍 $B_\delta(a)$ が存在するということである．これを連続写像の定義とするのである．

つまりまとめると，

連続写像の定義

> X, Y を距離の入った位相空間とする．
> $f : X \to Y$ が $x = a$ で連続であるとは，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，$\exists\delta$ が存在して，$\forall x \in B_\delta(a)$ に対して，
>
> $$f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$$
>
> とできることである．そのような，δ 近傍が存在するということである．

この一般の位相空間に対する連続写像の定義で，$X = Y = R$ として，a や $f(a)$ の ε 近傍を絶対値を用いて (もちろんユークリッドの距離である) 具体的に表したのが，大学新入生がまず最初に学ぶとされる $\varepsilon - \delta$ 論法なのである．これをかき直すと

$\varepsilon - \delta$ 論法

> $f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，$\exists\delta$ が存在して，$|x - a| < \delta$ を満たすすべての x は
>
> $$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$
>
> を満たす．

となる．注意することは，この $|x - a| < \delta$ の部分も，p.63 の節 1.13 でも述べたように，きちんとした意味があり,「点 a へあらゆる近づけ方をしても」という意味が含まれている (というより，$(a - \delta, a + \delta)$ の中で x はどんなふるまいをしていてもよいということである．).

また不連続な写像の性質は，収束しない数列と同じ感覚で，$\varepsilon = \varepsilon_1$ のとき，$B_{\delta_1}(a)$ に属する**任意の点** x に対して $f(x)$ が $B_{\varepsilon_1}(f(a))$ にすっぽり入るような δ_1 を見つけることができる，$\varepsilon = \varepsilon_2$ のとき，$B_{\delta_2}(a)$ に属する**任意の点** x に対して $f(x)$ が $B_{\varepsilon_2}(f(a))$ にすっぽり入るような δ_2 を見つけることが

できる，しかし，$\varepsilon = \varepsilon_3$ のとき，$B_\delta(a)$ に属する任意の点 x に対して $f(x)$ が $B_{\varepsilon_3}(f(a))$ にすっぽり入るような δ をいくら探しても見つけることができない，必ず $B_\delta(a)$ に属する**ある点** y で，$f(y) \notin B_{\varepsilon_3}(f(a))$ となるものが存在するということである．これは収束しない数列の性質 p.49 の節 1.12 と全く同じ感覚である．

これを数学用語でかき直すと

連続でない写像の定義

> X, Y を距離の入った位相空間とする．
> $f: X \to Y$ が $x = a$ で連続でないとは，$\exists \varepsilon > 0$ をとったとき，$\forall \delta$ に対して，$\exists y \in B_\delta(a)$ をとると，
>
> $$f(y) \notin B_\varepsilon(f(a))$$
>
> となる y が存在することである

連続写像の定義と同じように，この写像を R から R の写像に変えて，不連続な写像 (連続でない関数) を $\varepsilon - \delta$ 論法で述べると，

不連続な写像 (関数) を $\varepsilon - \delta$ 論法で表記

> $f(x)$ が $x = a$ で連続でないとは，$\exists \varepsilon > 0$ をとると，$\forall \delta$ に対して $|x - a| < \delta$ を満たすある点 x をとると
>
> $$f(x) \notin (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)，\text{つまり}, |f(x) - f(a)| \geqq \varepsilon$$
>
> となる点 x が必ず存在する．

となる．

ε から決めるところなど，これは収束する数列と同じ特徴である．収束する数列の特徴は，どんなに $\varepsilon > 0$ を小さくとっても，あるスタートラインの数をみつけることができて，ある数より大きい自然数に対応するすべての数列の項が，$(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$($\alpha$ は極限値) の中にすっぽり入れることができることであった．連続写像も同じで，どんなに $\varepsilon > 0$ を小さくとっても，ある a の δ 近傍 $B_\delta(a)$ を見つけることができて，$B_\delta(a)$ に属するすべて点 x に対応

する $f(x)$ が $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$ の中にすっぽり入るということである．この章の冒頭でも述べたように，位相空間論，強いては連続写像の $\varepsilon-\delta$ 論法をしっかり理解してイメージできるには，数列の $\varepsilon-m$ 論法がしっかりできることが大事であるといったのもこういう理由からである．

$\varepsilon-\delta$ 論法で気をつけておくことは，高校までは，x が a に近づけば，$f(x)$ が $f(a)$ に近づくという考えで連続性を考えてきたが，その動きの様子を式で表したのが，$\varepsilon-\delta$ 論法ではないのである．連続写像の特徴を式で表したものであるということをしっかり頭の中に入れておかないといけない．これらの $\varepsilon-\delta$ 論法も，p.104 の節 1.16 にも述べたような，$\varepsilon-m$ 論法と同様の疑問をもつ人も多いはずである．つまり，高校時代に $x \to a$ としたときに，それに伴い $f(x) \to f(a)$ と，$x \to a$ が先にきて考えていたということである．しかし，$\varepsilon-\delta$ 論法は $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ と ε から決めている．これは，$\varepsilon-m$ 論法の考えと全く同じで，連続または不連続がわかっていて，はじめて使うものである．または，連続であることを保証する式である．ここの微妙な違いを指導者ははっきりと説明しないといけないと思う．

それでは，距離空間における連続写像の定義を使って，具体的な関数で証明し，$\varepsilon-\delta$ 論法，強いては連続写像の定義に慣れよう．連続関数の $\varepsilon-\delta$ 論法は，数列の $\varepsilon-m$ 論法がしっかりイメージできて理解できていれば全く難しくない．ほとんど同じ内容である

2.15.5　連続関数の $\varepsilon-\delta$ 論法の具体例

連続関数の $\varepsilon-\delta$ 論法は，数列の $\varepsilon-m$ 論法と同じで，これを使って，連続か不連続を見つけることができるのではなくて，連続または不連続がわかっていて，はじめて使うものだと思ったらよい．つまり,「次の関数が不連続であるということがわかっている．それを式を使って証明せよ」といった具合である．

以下，R にはユークリッドの距離が入っている，距離空間とする．

1 次関数の連続性の証明

$f(x) = ax + b$ で定義される写像 $f : R \to R$ は，点 $x = c$ で連続な写像である．

【証明】

$|f(x) - f(c)| = |(ax + b) - (ac + b)| = |a||x - c|$ より，$\forall\varepsilon > 0$ に対して，$\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$ をとると，$|x - c| < \dfrac{\varepsilon}{|a|}(= \delta)$ を満たす任意の x は，

$$|f(x) - f(c)| = |a||x - c| < |a| \cdot \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon$$

となり，$\varepsilon > 0$ に対して，$|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ を満たすので，この写像は $x = c$ で連続で，c は R の任意の点なので，連続写像 (連続関数) であることが証明された．この $\varepsilon - \delta$ 論法のようすを図で表すと図 2-51 のようになる．

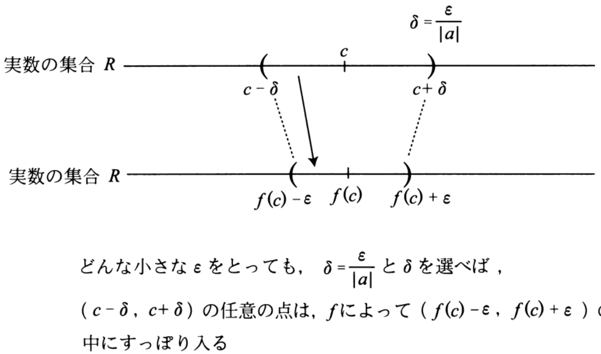


図 2-51　1 次関数 $\varepsilon - \delta$ 論法を使って証明のイメージ図

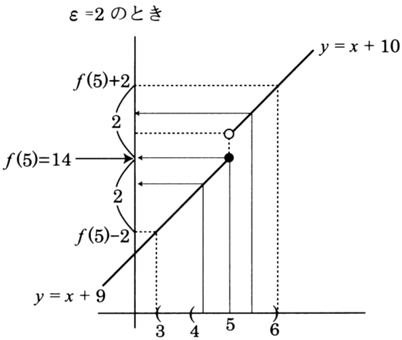
大事なことは式の意味を理解することである．上の式の展開をみただけであれば，はじめて学ぶ者にとって全く意味のわからないものであろう．これらの式の意味を，図にかいて説明できるようになれば，本当に理解したといえるであろう．次に不連続な写像を，$\varepsilon - \delta$ 論法を使って証明しよう．

不連続な関数の証明

$$f(x) = \begin{cases} x+10 & (x>5) \\ x+9 & (x \leqq 5) \end{cases}$$

で定義される写像 $f : R \to R$ は $x=5$ において不連続である．

ここでは，高校時代に慣れ親しんだ，グラフにして解説してみよう．たとえば $\varepsilon = 2$ とする．$\forall x \in (5-\delta,\ 5+\delta)$ に対して $|f(x)-f(5)| < 2$ を満たすような δ が存在するか，つまり，$\forall x \in (5-\delta,\ 5+\delta)$ に対して，$f(x) \in (f(5)-2,\ f(5)+2)$ となるような δ をいくらにすればよいのかということである．注意することは，任意の (すべての)$x \in (5-\delta,\ 5+\delta)$ に対して，$|f(x)-f(5)| < 2$ を満たしておかないといけないということである．このとき，図 2-52 より (または簡単な計算より)，(3, 6) の任意の点 x が，$|f(x)-f(5)| < 2$ を満たしているので，たとえば $\delta = 1$ として，
$(5-1, 5+1) = (4, 6)$ と定義域を考えればよい．つまり，$\varepsilon = 2$ に対しては，$\delta = 1$ がみつかった．



ε =2 のとき，δ =1 として開区間 (4, 6) を考えると，
任意の $x \in (4,\ 6)$ に対して，$f(x) \in (f(5)-2\ ,\ f(5)+2\ )$ である

図 2-52　$x=5$ で $\varepsilon=2$ に対して δ を考える

同様にして，たとえば $\varepsilon = 1.5$ とする．$\forall x \in (5-\delta,\ 5+\delta)$ に対して $|f(x)-f(5)| < 1.5$ を満たすような δ が存在するか，つまり，$\forall x \in (5-\delta, 5+\delta)$

に対して，$f(x) \in (f(5)-1.5,\ f(5)+1.5)$ となるような δ をいくらにすればよいのかということである．このとき，先ほどと同様にして，$(3.5,\ 5.5)$ の任意の点 x が，$|f(x)-f(5)| < 1.5$ を満たしているので，たとえば $\delta = 0.5$ として，$(5-0.5,\ 5+0.5) = (4.5,\ 5.5)$ と定義域を考えればよい．このようにして，$\varepsilon = 1.5$ に対しても，$\delta = 0.5$ とある数 δ が見つかる．

こんどは，$\varepsilon = 0.5$ としたときに，$\forall x \in (5-\delta,\ 5+\delta)$ に対して $|f(x) - f(5)| < 0.5$ を満たすような δ が存在するか考えてみよう．この場合，図 2-53 より明らかにどんなにがんばって δ を探してみても (どんなに小さい δ を考えてみても)，ある数 $a \in (5-\delta,\ 5+\delta)$ を選んだときに，
$f(a) \notin (f(5)-0.5,\ f(5)+0.5)$ となる a が存在する．たとえばここでは，$a = 5.1$ などがそうである．つまり，$f(5.1) \notin (f(5)-0.5,\ f(5)+0.5) \longleftrightarrow |f(5.1)-f(5)| > 0.5$ ということである．

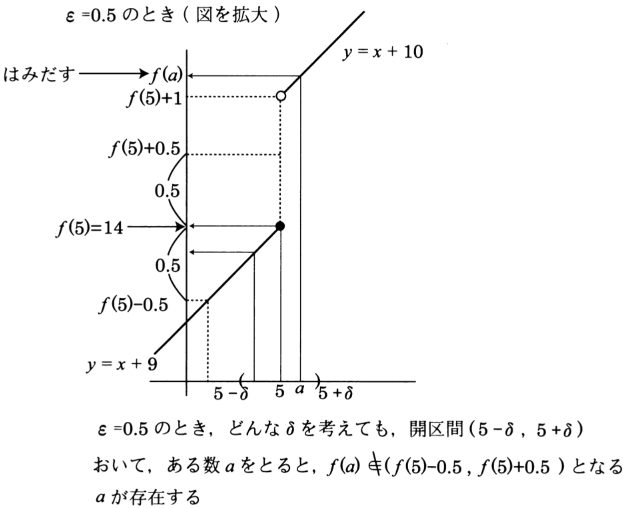
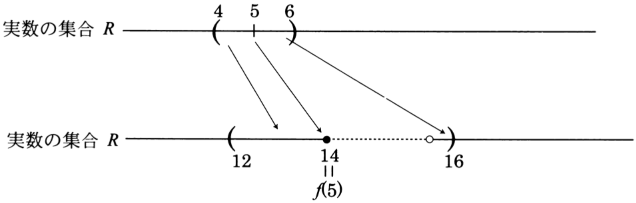


図 2-53　$x = 5$ で $\varepsilon = 0.5$ に対して δ を考える

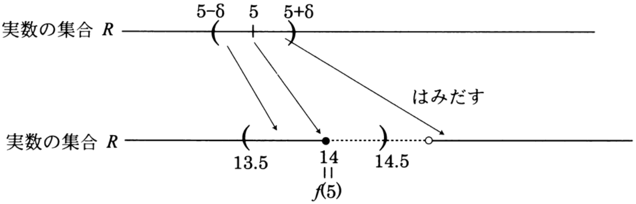
もしこれを，グラフを使って表さずに，p.310 の図 2-44 のような，写像をイメージをした図を使って考えると，$\varepsilon - \delta$ 論法を使っての不連続であるこ

との証明が，イメージしやすくなる (図 2-55).



ε =2 のとき, δ=1 をとると， f によって写される（4, 6）の点は
必ず，（12, 16）の中にすっぽり写る．しかし，ちぎれてはいる．

図 2-54 写像のイメージ図で $x = 5$ で $\varepsilon = 2$ に対して δ を考える



ε =0.5 のとき，どんなに小さいδをとっても
f によって写される（5−δ, 5+δ）の点の中に
必ず，（13.5, 14.5）からはみ出す点がある

図 2-55 写像のイメージ図で $x = 5$ で $\varepsilon = 0.5$ に対して δ を考える

不連続な関数の証明

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

で定義される，写像 $f : R \to R$ は $x = 0$ において不連続である．

今回は，p.322 の図 2-49 を参考にしながら，写像という観点からの図を使って説明してみたい．ちなみにグラフにかくと，p.315 の図 2-45 のようになる．これは一見つながっているように見える，しかし，いざ証明するとつ

ながっていなかった．だからこそ，$\varepsilon-\delta$ 論法で数学的に連続であると定義することが大事である．

流れとしては，$\varepsilon=5$ のとき，$\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqq 1$ に注意すると，たとえば $\delta=0.5$ とすると，$|x-0|<0.5$ を満たす任意の x に対して，$f(x)$ は $(f(0)-5,\, f(0)+5)=(-5,\, 5)$ の中にすっぽり入る．つまり，$\varepsilon=5$ に対して，ある数 $\delta=0.5$ を見つけることができた．ちなみに $\forall x\in R$ に対して，$\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqq 1$ となる意味は，

$$|f(x)-f(0)|=\left|\sin\frac{1}{x}-0\right| \leqq 1$$

という意味なので，写像の観点から説明すると，$\forall x\in R$ は f によって，0 の近傍 $(-1,\, 1)$ の中に写ることをいっていることに注意．(次の節と p.334 の図 2-57 を参照)．よって，$\varepsilon>1$ の場合は，$\forall x\in(0-\delta,\, 0+\delta)$ に対して，$f(x)$ が $(f(0)-\varepsilon,\, f(0)+\varepsilon)$ にすっぽり入るような δ は，何でもよいことになる．

ということは，ε を決めるときに慎重にならざるをえないのが，$\varepsilon\leqq 1$ のときである．p.322 の図 2-48 の図を見てもわかるように，0 の近辺の数字で，必ず f によって，1 に写る数字があることが想像できる．実際に，$f(x)=\sin\frac{1}{x}$ で，

$$x=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}=\frac{2}{(4n+1)\pi}(n \text{ は自然数})$$

のときは，1 になる．もちろん，n を大きくしていくと，$\frac{2}{5\pi},\frac{2}{9\pi},\frac{2}{13\pi},\cdots$ と 0 に近づいていく．

よって，たとえば，ある $\varepsilon=0.5$ とすると，$\forall x\in(0-\delta,\, 0+\delta)$ に対して，$f(x)$ が $(f(0)-0.5,\, f(0)+0.5)=(-0.5,\, 0.5)$ の中にすっぽり入る入るような δ を見つけることができるかというと，先ほどの説明より，どんな δ をもってきても ($\forall\delta$ に対して)，$\frac{2}{(4n+1)\pi}<\delta$，つまり $n>\frac{1}{2\delta\pi}-\frac{1}{4}$ を満たす自然数 n に対応する，$x=\frac{2}{(4n+1)\pi}$ をとると，

$f\left(\frac{2}{(4n+1)\pi}\right)\notin(-0.5,\, 0.5)$ となるある数 $\frac{2}{(4n+1)\pi}\in(0-\delta,\, 0+\delta)$ が存

在するので，この写像 f は 0 において連続ではないとなる (図 2-56 参照).

これは，私の経験上の話であるが，この写像を 0 で連続でないという証明をするときは，グラフよりも p.322 の図 2-48 の写像のイメージ図を使って説明した方がわかりやすいと思うので，図に示した．

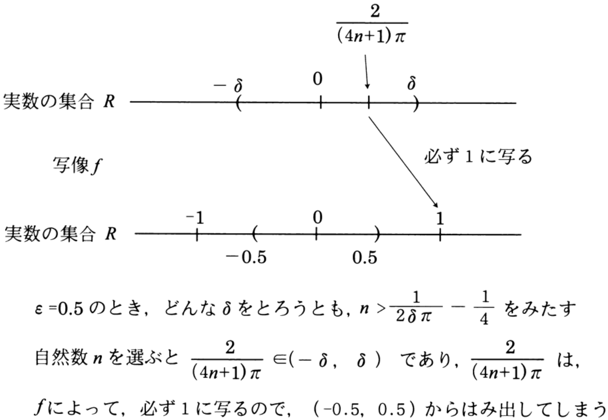


図 2-56　f によって原点からはみ出す様子

連続な関数の証明

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

で定義される，写像 $f : R \to R$ は $x = 0$ において連続である．

この証明も，p.316 でグラフを使って証明している．ここでは，写像の観点の図 2-49 を使って解説してみよう．

$\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqq |x|$ つまり，$|f(x) - f(0)| = \left|x\sin\dfrac{1}{x} - 0\right| \leqq |x - 0|$ というようにかき直すことができる．この式の意味を考えると，図 2-57 をみてもわかるように，定義域 R の 0 の近くの任意の点 x は，f によって，$f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ の値のところに写されるのであるが，その値というのは,「x と 0 の距離」と「$f(0) = 0$ と $f(x)$ の距離」が同じか,「x と 0 の距離」より 0 により近い点に

写ることを意味している．

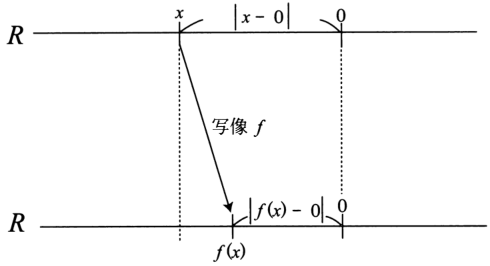


図 **2-57**　f によってより原点に近づく様子

以上より，$\varepsilon - \delta$ 論法を使って，次のように，$x = 0$ で連続であることが証明される．

$\varepsilon > 0$ に対して，$\delta = \varepsilon$ とおくと，$|x - 0| < \varepsilon (= \delta)$ を満たすすべての x に対して ($\Longleftrightarrow \forall x \in (0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon)$ に対して)，$f(x) \in (0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon)$ を満たす．つまり，$|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ が成り立つので，証明された (図 2-58 参照)．

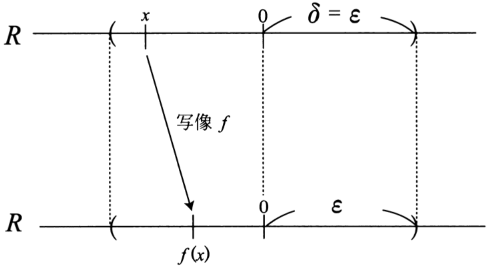


図 **2-58**　ε 近傍，δ 近傍，写像 f の関係

これらの証明をみてもわかるように，当たり前であるが，p.316 の高校生の受験参考書に載っている解き方と全く違う．$\left| x \sin \dfrac{1}{x} \right| \leqq |x|$ の式の意味の

とらえ方の違いをしっかり理解してほしい．この証明のように，大学の数学を学んでいく上で，いろんな視点から式を考えることが非常に多くなってくる．高校時代からしっかり式の意味について考える習慣をつけておこう．

つながっていないということを (連続でないということを)，$\varepsilon-\delta$ 論法を使って説明できた．考え方は，数列の $\varepsilon-m$ 論法とほとんど同じである．連続であるとは (連続である写像の特徴は)，どんなに ε を小さくとっても，x の近くの点**すべてが** f によって，$f(x)$ の近く (ε 以内に) 写されるということである．収束する数列と，同じ感覚で理解しておこう．そして，x からの距離が δ 以内の中にある点は，どんな散らばり方をしていても，
$(f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$ の中にすっぽり入るということである．これは，a にどんな近づけ方をしても，$f(x)$ は $f(a)$ に近づくということをいっている．

さて，先ほどまでの連続性の議論は，ユークリッドの距離が定義された距離空間 (位相空間) において考えてきた．その連続性の定義には，距離が定義されているので $\varepsilon-\delta$ 論法を用いて定義した．というより，距離を入れてつくった位相空間のみに定義されるものである．しかし，位相空間はすべて距離が入っているかというとそうではなく，p.243 の節 2.12.6 でも述べたように，単なる集合に対して,「〜が好き」という集合で各人に対して近傍系を定義して位相空間に変えることができた．つまり，距離を入れなくても位相空間をつくることができた．だから，位相空間になった以上は，この位相空間に対しても，連続写像が定義できる．

そこで，距離を入れていない位相空間に対して，$\varepsilon-\delta$ 論法が使わずに，どのように連続写像を定義するのであろうか．それを解説したい．

コメント

最初，近傍はある点を中心とした ε 近傍 (開近傍) を含むような集合すべてはその点の近傍ということを述べた．こんな定義をしても意味があるのかと最初思うはずである．

任意の近傍 V に対して，

$$f(U) \subset V$$

となるような，開集合 U がとれれば f は連続となる．だから，$f(x) = 2x+1$ で，$x = 2$ の連続性であるが，終域の $f(2) = 5$ の近傍
$V = [3, 9] \cup (100, 10000)$ に対して，$f(U) \subset V$ となる U が存在するかというと，$U = (1.5, 2.5)$ とればよい．

つまり，近傍とは点の周りの開近傍だけが保証されていれば，連続性はどんな変わった近傍をとってきてもよいという意味なのである．だから，R の部分集合 $[3, 9] \cup (100, 10000)$ が 5 の近傍としてもよい理由の 1 つはここにもあると思う．つまり，$[3, 9] \cup (100, 10000)$ を 5 の近傍としても，連続性の保証はできるのである．しかし，こんな大きな近傍を使って連続性を語るときりがないので，結局は近傍の核の部分だけに注目した基本近傍のみを使って，連続性を証明できればよりシンプルな印象を与えることができる．一番シンプルなのは，ε 近傍だけで議論すればもっとわかりやすいものになるであろう．

2.16　一般の位相空間に連続写像を定義・連続写像の性質

いままでは，つながっている，つながっていないで連続写像を考えてきた．連続写像を「つながっている」という解説は，実は厳密性を大切にする大学の先生にとってはつっこみどころ満載なのである．この「連続とはつながっている」という解説のどこがいけないのか，なぜ突っ込みどころ満載なのか，それを以下説明していきたい．距離を入れていない一般の位相空間に対して，連続写像を定義すれば，その云わんとすることがわかるであろう．

まずは，連続写像が定義できるのは，近傍 (開集合) が定義された位相空間のときであるという大前提を忘れてはいけない．単なる写像であれば，別に位相空間でなくても，単なる集合だけでもよい．

連続写像の定義を思い出してみよう．X, Y を距離の入った位相空間とする．$f : X \to Y$ が $x = a$ で連続であるとは，$\forall \varepsilon > 0$ に対して，$\exists \delta$ が存在して，$\forall x \in B_\delta(a)$ に対して，

$$f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$$

とできることである．そのような，δ 近傍が存在するということであった．

これが，p.243 の節 2.12.6 のような距離の入っていない位相空間において，点 a において連続であるとは，ε 近傍 $B_\delta(a)$ のかわりに，a の近傍 U_a を使って，次のように定義できる．

一般の位相空間の点 a における連続性

X，Y を位相空間とする．$f : X \to Y$ が a で連続であるとは，$\forall V_{f(a)} \subset Y$ に対して，$\exists U_a$ が存在して，$\forall x \in U_a$ に対して，

$$f(x) \in V_{f(a)}$$

とできることである．そのような，U_a が存在するということである．

ここで注意することは，これは $x = a$ で連続の保証であって，他の点で連続か保証できていない．f が連続写像であるということは，定義域の**任意の点**で連続であるということである．

f が連続，つまり任意の点で連続であるとは，終域の**各点**で ε 近傍 $B_\varepsilon(f(a))$(一般の位相空間では $V_{f(a)} \subset Y$) を考えることができて，**各点**で連続の定義を満たすということである．1 点，1 点で ε 近傍 (一般の位相空間では $V_{f(a)} \subset Y$) を考え，そのつど連続性の定義を確認していくよりも，ε 近傍をまとめて考えることができれば，連続写像であることを証明するのには便利である．そこで，任意の点で ε 近傍 (一般の位相空間では $V_{f(a)} \subset Y$) を考えることのできる集合 (ε 近傍をまとめて考えることのできる集合) を考えるのであるが，その集合こそ**開集合**である．開集合を使って，f の連続性の定義をしよう．つまり，開集合を使って連続性を語ることができれば，任意の点で連続ということがいえる．

まずは，結果から述べてみる．

開集合を使った連続性の定理 (定義)

X, Y を位相空間とする.

$$f : X \to Y \text{ が連続写像である} \Longleftrightarrow \forall V \in Y \text{ の開集合 } V \text{ に対して,}$$
$$f^{-1}(V) \text{ が } X \text{ の開集合になる}$$

ということである. この定理に使われている記号の意味について考えよう. まず, ここで注意しないといけないのは $f^{-1}(V)$ であるが, これは f の逆写像を表しているのではなくて,

$$f^{-1}(V) = \{x | x \in X, f(x) \in V\}$$

となる X の点の集合を表しているということである (つまり, x の部分集合である). この集合を f の**逆像**という (もう一度述べるが, 逆写像ではない). そして, この $f^{-1}(V)$ が開集合ということは, $f^{-1}(V)$ の任意の点で ε 近傍を考えることができるということである.

以下, 距離の入った位相空間として議論する (一般の位相空間においては ε 近傍 $B_\delta(a)$ の代わりに U_a に置き換えて読めばよい). つまり, この定理を要約すると, f が連続写像であれば, (任意の点で ε 近傍をとることのできる) どんな開集合 V を考えたときも, f によって V の中に写る点の集合 (X の部分集合) は, X の開集合である (つまり, 任意の点で ε 近傍がとれるということである). これは,「どんな小さな ε 近傍 $B_\varepsilon(f(a))$ を考えても」のまとめた言い換えであることに注意.

それではこの定理を証明しよう.

($\Longrightarrow$) まず, f が連続と仮定する (Y は位相空間だから開集合が定義されているので開集合を考えることができる). 任意の開集合 $V \subset Y$ に対して, f が連続写像のとき, $f^{-1}(V)$ の**任意の点** m で δ 近傍 $B_\delta(m) \subset f^{-1}(V)$ となるようにとることができれば, $f^{-1}(V)$ が開集合となり証明がされる.

$\forall m \in f^{-1}(V)$ に対して, $f^{-1}(V)$ の定義より, $f(m) \in V$ である. ここで, 仮定より V は開集合であるから, 点 $f(m)$ で ε 近傍 $B_\varepsilon(f(m))$ を $B_\varepsilon(f(m)) \subset V$ となるようにとることができる. そして, 仮定より f の連続性より, この $\varepsilon > 0$ に対してある δ がとれ, $\forall y \in B_\delta(m)$ が, $f(y) \in$

$B_\varepsilon(f(m))$ となるような，ある δ 近傍 $B_\delta(m)$ が存在する．

これは，$\forall y \in B_\delta(m)$ に対して $f(y) \in B_\varepsilon(f(m))$ であるので，

$$y \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(m)))$$

である (逆像の定義を確認しよう)．また，$B_\varepsilon(f(m)) \subset V$ であるので，

$$f^{-1}(B_\varepsilon(f(m))) \subset f^{-1}(V)$$

がいえる (最後の【補足】を参考にしよう)．よって，

$$B_\delta(m) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(m))) \subset f^{-1}(V)$$

である．よって，最初にとった m が任意だったので，任意の m に対して，$B_\delta(m) \subset f^{-1}(V)$ となるように δ 近傍がとれたので，$f^{-1}(V)$ は開集合である．

($\Longleftarrow$) こんどは，写像 f について (この段階では，f は連続写像ではない)，開集合の逆像が開集合であると仮定しよう．このとき，f は連続写像である．$\forall a \in X$ に対して，$f(a)$ の**任意の** ε 近傍 $B_\varepsilon(f(a))$ を考える．ε 近傍は開集合より (p.202 で証明済み)，仮定から $f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ は開集合である．$a \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ に注意して，$f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ で a においても開集合 δ 近傍 $B_\delta(a)$ で，

$$B_\delta(a) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$$

となるようにとれる．したがって，任意の ε 近傍 $B_\varepsilon(f(a))$ に対して，ある $B_\delta(a)$ がとれ，$\forall x \in B_\delta(a)$ は，$f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$ であるので，f は連続写像となる．

【補足】

一般に $A \subset B$ であれば，$f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ である

【証明】

$\forall a \in f^{-1}(A)$ ならば，$f(a) \in A$．ここで，$A \subset B$ であるので，$f(a) \in B$．よって，$a \in f^{-1}(B)$ がいえ，証明された．

この定理によって，近傍を使って**各点における**連続性を語っていたものが，近傍という言葉がなくなり，近傍がまとまって開集合という言葉に変わった．**任意の点において**の f の連続性が位相空間の根本をなす開集合という言葉を使って語られるようになったわけである．

また，「開集合の逆像が開集合であれば連続」という定理よりも，その定理に潜む定理の意味について深く考えることが大事である．私は，これを定理として証明したが，これを連続性の定義として解説している本もあることに注意する必要がある．

距離が定義されていれば，$\varepsilon - \delta$ 論法で連続性が定義されるが，距離が入っていない位相空間では，$\varepsilon - \delta$ 論法を使って連続性が定義できないということも理解しておかないといけない．距離の入っていない一般の位相空間でそれを確かめよう．

一般の位相空間において連続写像の例 －単身赴任は不連続写像－

よく連続写像・不連続写像を語るときに，家族一緒に引っ越したら連続写像，単身赴任であれば不連続写像というようなことを語る数学者の先生がいる．それはどういう意味なのか解説することにしよう．

$X = \{$ 父，母，長男 $\}$，$Y = \{$ 東京，大阪 $\}$ というような**集合**を考える．集合であるので，**写像** $f : X \to Y$ は定義できる．ここで，f(父) $=$ 東京，f(母) $=$ 大阪，f(長男) $=$ 大阪 と**写像**を定義する．これは写像であるので単なる対応である

ここで f が連続写像かどうかを定義するためには，X と Y を近傍 (開集合) の定義された位相空間でないといけない．そこで，各人，各県に対して，次のような近傍を考え X と Y を位相空間に変えよう．

父の近傍:{ 父，母，長男 }
母の近傍:{ 母，父，長男 }
長男の近傍:{ 長男，父，母 }

と，各人に対してすべての家族の人を仲間とするような密着位相で定義しよう．密着位相を定義することによって，お互いがすべて仲間 (ここでは家族というような一体感) と感じる近傍を各人に定義したわけである．

また，集合 Y に関しては，

大阪の近傍:{ 大阪 }, { 大阪，東京 }
東京の近傍:{ 東京 }, { 大阪，東京 }

と定義する．これは，まず関西と関東で仲間 (近傍) を定義して (基本近傍を作り)，p.227 の近傍の公理 (4) より近傍を含む集合もその点の近傍になることに注意する (ちなみにこれは離散位相である).

以上で，X と Y は位相空間になったので，連続写像が定義できる．たとえば，この写像 f は父で連続であるか考えると，f(父) = 東京 のどんな近傍 { 東京 }, { 大阪，東京 } をとってきても，それらの近傍にすっぽり入るような定義域の父の近傍があるか考えると，{ 大阪，東京 } の場合は，
f(父) = 東京, f(母) = 大阪, f(長男) = 大阪 $\in$ { 大阪，東京 } となり，父の近傍 { 父，母，長男 } をとればよいが，{ 東京 } の場合は，この近傍にすっぽり入るような定義域の父の近傍はない．なぜなら父の近傍は
{ 父，母，長男 } しかなく，この近傍の任意の点 (人) すべてが f によって，近傍 { 東京 } の中に写るかというと，f(父) = 東京 $\in$ { 東京 } であるが，f(母) = 大阪 $\notin$ { 東京 } であるので，この写像は父で連続でない，つまり連続写像ではないということである．言い換えたら，家族はちぎれてしまっているということである．これは，単身赴任であると不連続な写像になるという理由はこういう具体例からいえることである．

一般の位相空間において連続写像の例 －家族一緒の引っ越しは連続写像－

今度は逆に家族一緒に引っ越すことを考えよう．これは連続写像になる．先ほどの例で写像を f(父) $=$ 東京, f(母) $=$ 東京, f(長男) $=$ 東京 と定義する．このとき各人において f は連続である．

f(父) $=$ 東京 のどんな近傍 { 東京 }, { 大阪，東京 } をとってきても，それらの近傍にすっぽり入るような定義域の父の近傍があるか考えると，{ 大阪，東京 } の場合は，f(父) $=$ 東京, f(母) $=$ 東京,
f(長男) $=$ 東京 $\in$ { 大阪，東京 } となり，父の近傍 { 父，母，長男 } をとればよいが，{ 東京 } の場合は，同じようにこの近傍にすっぽり入るような定義域の父の近傍 { 父，母，長男 } をとれば (というよりこの近傍しかないが $\cdots$)，この近傍の任意の点 (人) すべてが f によって，f(父) $=$ 東京,
f(母) $=$ 東京, f(長男) $=$ 東京 $\in$ { 東京 } であるので，f(父) $=$ 東京 のどんな近傍 { 東京 }, { 大阪，東京 } をとってきても，その近傍にすっぽり入るような定義域の父の近傍をとることができたので，父で連続である．同様にして，母，息子においても f は連続である．よって，任意の点 (人) において連続であることが証明されたので，f は連続写像である．つまり，家族一緒に引っ越せば，家族がちぎれていないので連続写像ということがいえるのである．

以上の具体例より，単身赴任は同じ近傍にある者が別れるので不連続，家族一家の引っ越しは近傍がちぎれることなく写るので連続であるという意味はわからなくもない．だから，ユークリッド空間でなくても，家族の引っ越しで考えると，不連続写像はちぎれて，連続写像はつながっているというようなことがいえなくもない．我々は，つながっている・つながっていない (点と点が隙間なくつながっているようにみえる) で連続性を語ってきたが，この例からわかるように，父，母，息子は隙間なくつながっていない．だから，大学の先生は，点がつながっているのが連続であるというのは間違いであるという言い方をするのはこのためだと思う

結局，**連続性というのは近傍でつながっている (同じ近傍内になるものが) ことが，バラバラになることなくまとまって写るということである．点と点が**

つながっていなくても，写るときに近傍でつながっていれば連続である．それが連続写像の神髄なのである．つながっているかどうかどうかというのは，近傍を使って語られているということである．つまり仲間ということを意識することによって，つながり具合を考えることができるということなのである．だから点はつながっていなくても，近傍で気持ちがつながっていれば連続である．だから私は結局つながっているものを連続といってもかまわないと思っている．

さてこの家族の引っ越しによる連続写像を考えるとき，各点 (人) に対して連続であるから，連続写像であるというような証明の仕方をした．各点において連続性を調べるので，煩わしいのは否めない．ここで，各点において調べずに，p.338 の連続写像の開集合を用いた定理を使って証明すれば，各点を調べずに一気に？連続性を証明することができる．

先ほどの位相空間 (近傍を定義して作った位相空間) を開集合にかえて，定義しよう．X は密着位相，Y は離散位相だったので，X の開集合族は $\mathfrak{M}=\{\{$ 父，母，長男 $\},\varnothing\}$，Y の開集合族は $\mathfrak{N}=\{\{$ 東京 $\},\{$ 大阪 $\},\{$ 大阪，東京 $\},\varnothing\}$ になるので，X と Y は開集合を用いて定義された位相空間になる．写像 $f:(X,\mathfrak{M})\to(Y,\mathfrak{N})$ を $f($父$)=$ 東京, $f($母$)=$ 東京,
$f($長男$)=$ 東京 と定義すると，f の定義より，
$f^{-1}(\{$ 東京 $\})=\{$ 父，母，長男 $\}$, $f^{-1}(\{$ 大阪 $\})=\varnothing$, $f^{-1}(\{$ 大阪，東京 $\})=\{$ 父，母，長男 $\}$, $f^{-1}(\varnothing)=\varnothing$ と終域の任意の開集合の逆像がすべて開集合であるので，f は連続写像である．

この証明を見る限り，開集合を用いて連続性を証明しても，近傍を用いて連続性を証明してもたいして煩わしさに差はないが $\cdots$．これは個人的な見解であるが，連続性を証明するときは，各点を使って証明した方が連続性のイメージがわきやすいと私は考える．

一般の位相空間において連続写像の例

p.344 では集合 $X = \{a, b, c\}$ に対して，スポーツ好きで各人の近傍を作り位相空間にした．p.344 での位相空間は，

$$a \text{ の近傍}:\{a, b\}, \{a, b, c\} \tag{2-63}$$
$$b \text{ の近傍}:\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \tag{2-64}$$
$$c \text{ の近傍}:\{b, c\}, \{a, b, c\} \tag{2-65}$$

で定義されたものであった．この位相空間を $(X, \mathfrak{F}_0)$ とおこう．

もう一つの位相空間を，次のように近傍を定義した位相空間とする．

$$x \text{ の近傍}:\{x\}, \{x, y, z\} \tag{2-66}$$
$$y \text{ の近傍}:\{y, z\}, \{x, y, z\} \tag{2-67}$$
$$z \text{ の近傍}:\{y, z\}, \{x, y, z\} \tag{2-68}$$

これも近傍の公理を満たす．この位相空間を $(X, \mathfrak{F}_1)$ とおこう．ここでは，シンプルにするために，近傍の公理を使って (特に近傍の公理 (4))，各点の近傍すべてをつくるのではなく，開近傍だけにしておく．

このとき，写像 $f : (X, \mathfrak{F}_1) \to (X, \mathfrak{F}_0)$ を，(たとえば関数を定義するように)，$f(x) = a$，$f(y) = f(z) = b$ と写像を定義する．この写像で物語をつくるとすれば，たとえば次のようなものができる．x, y, z は同じ学校の生徒で，$\{x\}$，$\{y, z\}$ という同じクラスの生徒で近傍をつくり，写像は放課後のクラブで誰の指導を受けるのかということにしよう．

このとき f は連続写像である．f が連続写像であるということは，$(X, \mathfrak{F}_1)$ の各点 (各人) で連続であることを示せばよい．

たとえば，x で f は連続であるかというと，終域の $f(x) = a$ のどんな近傍 $\{a, b\}, \{a, b, c\}$ をとってきても，たとえば，$\{a, b\}$ にすっぽり入る定義域の x の近傍があるか考えると (どんな点 (人) をとってきても f によって $\{a, b\}$ にすっぽり入る定義域の a の近傍があるか考えると)，定義域の近傍 $\{x\}$ や $\{x, y, z\}$ を考えることができる．なぜなら，$\{x\}$ のときは，
$f(x) = a \in \{a, b\}$ であるし，$\{a, b, c\}$ を考えたときは，$f(x) = a$，$f(y) = f(z) = b \in \{a, b\}$ となるからである．よって，a で f は連続である．同様にして，c についても，f は連続である．

また，y で f は連続であるかというと，終域の $f(y) = b$ のどんな近傍 $\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$ をとってきても，たとえば，$\{b\}$ にすっぽり入る定義域の y の近傍があるか考えると (どんな点 (人) をとってきても f によって $\{b\}$ にすっぽり入る定義域の y の近傍があるか考えると)，定義域の y の近傍 $\{y, z\}$ を考えることができる．なぜなら，$\{y, z\}$ を考えたときは，$f(y) = f(z) = b \in \{b\}$ となるからである．

以下同様にして，終域の $f(y) = b$ の他の近傍 $\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$ についても，$\{a, b\}$ に対しては定義域の y の近傍
$\{y, z\}, \{x, y, z\}$，$\{b, c\}$ に対しては定義域の y の近傍 $\{y, z\}$，$\{a, b, c\}$ に対しては定義域の y の近傍 $\{y, z\}, \{x, y, z\}$ がとれるので，f は y について連続であることが証明された．

以上より，X の各点 x, y, z において連続であることが証明されたので，つまり任意の点において連続性が証明されたので，f は連続写像であることがいえる．よって，定義域の近傍がちぎれることなく，同じクラスの人は同じ人にクラブの指導をみてもらうというつながりが，数学的に証明された．これらは，各点すべてにおいて連続性を調べてから，連続写像であることを証明したが，これを，開集合を使って証明すれば，各点を調べずに一気に？連続性を証明することができる．ここでは証明しないが，それぞれの開集合族は $\mathfrak{F}_0 = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$，$\mathfrak{F}_1 = \{\{x\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$ である．

2.16.1　位相の強弱で連続写像を考える

p.298 で，位相の強弱を解説した．具体的な証明はしないが，同じ集合 X で，2 つの位相空間 $X_1 = (X, \mathfrak{F}_1)$, $X_2 = (X, \mathfrak{F}_2)$ に対して写像 $X_1 \to X_2; x \longmapsto x$ を考える．$\mathfrak{F}_1$ が $\mathfrak{F}_2$ より位相が強ければ，この写像は連続写像になる．たとえば，X_1 を離散位相，X_2 を密着位相で考えれば，直感的には明らかであろう．

以上で連続性の話を終えるが，どうだったろうか．この節の最初に，連続写像が「つながっている」と解説すると，厳密性を大事にする大学の先生は

突っ込みどころ満載ということを述べたが，その答えの 1 つは先ほど解説した，家族の引っ越しの話である．この写像の定義では，点がつながっているというイメージはわかない (わきにくい)．つまり，点がつながっていると解説する連続写像は，通常のユークリッド空間を使ったときの写像と考えたらよいと思う．数学科の学生以外は，一般の位相空間を学ぶ機会はほとんどないので，これから先，位相空間を学ぶ可能性のない学生に対して教えるときは,「連続写像＝つながっている」と教えても，言い過ぎではないと私は考える．

ただ連続写像は，終域のどんなに小さい近傍をとってきても，その近傍にすっぽり入るような近傍を考えることができるということをしっかりイメージしておく訓練は必要であると思うし,「気持ちがつながっている」という気持ちをもつようにしよう．

これでこの本のメインのイプシロンデルタ論法は終わる．最後簡単に相対位相を説明したあとに，コンパクト性を解説して，この本を終わりにしたいと思う．

2.17　相対位相

相対位相とは，相対，つまり他との関係の上に存在あるいは成立していることで，相手があって開集合や近傍を定義されている空間であるということである．p.171 で述べた相対的な考えとは少し違うので，内容を比較しながら確認していこう．この相対位相は，後で述べるコンパクトの性質で必要である．ここでは，確認しておこう．

X を位相空間，A を 1 つの X の部分集合とする．この近傍や開集合が定義されていない集合 A に，**X の近傍や開集合を利用して** (X は位相空間なので近傍や開集合は定義されている)，近傍や開集合を定義しようと考える．

つまり，A の部分集合 H が，A の開集合であることを，

$$H = U \cap A$$

となるような **X の開集合 U が存在することであると**定義する．

一番理解しやすい例として，図 2-59 でイメージ理解をしよう．図 2-59 は，$A = S^1$ で，$X = R^2$ にはユークリッドの距離による ε 近傍から導かれる開集合が定義されているものとする．この場合，ε 近傍は開集合であった．

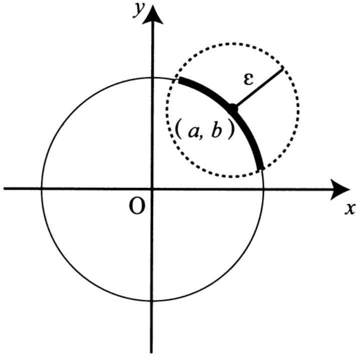


図 2-59 S^1 上の点における相対位相のイメージ

図 2-59 を見てもわかるように，近傍 (開集合) が定義されているユークリッド平面の ε 近傍 (開集合) を利用して，R^2 の**部分集合** S^1 に開集合を定義できたので，S^1 は R^2 において，位相空間になる意味である．特にこの位相は S^1 は R^2 の**部分位相空間** (単に**部分空間**) という．

話がそれたので，話を元に戻そう．$H = U \cap A$ となる X の開集合 U が存在すると定義された H が開集合の公理を満たすことを証明しよう．

相対位相の定義

(1) A および $\varnothing$ は，A の開集合である．
(2) A の**任意個の**開集合の和集合は，A の開集合である．
(3) A の任意の**有限個の**開集合の共通部分は，A において開集合である．

相対位相の定義 (1) について，$A = X \cap A$ となる開集合 X が存在するので (位相空間 X そのものは開集合であった)，A において A は開集合である．$\varnothing = A \cap \varnothing$ となる，X の開集合 $\varnothing$ が存在するので，A においても $\varnothing$ は開集

合である．

相対位相の定義 (2) について，$H_\alpha(\alpha \in \Lambda)$ を A の開集合とすると，$H_\alpha = G_\alpha \cap A$ なる X の開集合 G_α が存在する．$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} H_\alpha = (\bigcup_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha) \cap A$ より，$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$ は開集合であるから，$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} H_\alpha$ は，A の開である．

相対位相の定義 (3) について，$H_1, H_2, H_3, \cdots$ が A において開集合だとすると，仮定より

$$H_i = U_i \cap A$$

となる，X の開集合 $U_i(i = 1, 2, 3, \cdots)$ が存在する．このとき，

$$\bigcap_{i=1}^{n} H_i = \bigcap_{i=1}^{n}(U_i \cap A) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) \cap A$$

となり，X の開集合 U_i の有限個の共通部分 $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ は開集合より，またそのような開集合が存在するということであるから，$\bigcap_{i=1}^{n} H_i$ は開集合である．

このような定義より，位相空間 X の部分集合 A **そのもの**に開集合が定義されたわけである．たとえば，先ほど紹介した図 2-59 で，R^2 において (a, b) の開集合は図の点線の円であるが，円 S^1 の相対位相が導入されたことによって，S^1 は R^2 の部分空間となり，S^1 の開集合は図の S^1 そのものにある太線部分を考えてもよいことになったわけである．

以上簡単に相対位相を定義した．そして最後に，位相空間論で大事な概念の 1 つ，コンパクトを解説しよう．

2.18　コンパクト

高校時代の最大値・最小値の問題で，

$[-2, 5]$ において，$y = x^3 - 3x^2$ の最大値最小値を求めよ．

といような問題をたくさん解いてきた．ちなみに答えは，最大値が $x=5$ のとき 50 で，最小値が $x=-2$ のとき -20 である．もしこれが，$(-2,5)$ であれば，最大値と最小値は存在しないとなる．つまり，高校時代，閉区間 $[a,b]$ における連続な関数 (つまりつながっている関数)$f(x)$ は最大・最小値をもつことは直感的に認めてきて，それで関数のいろいろな問題を解いてきた．

また大学に入学してから多変数関数の最大値・最小値を求めることを学ぶ．図 2-60 のように，xy 平面に円 S^1 をかき，範囲 S^1 において曲面 $z=f(x,y)$ で最大値と最小値が存在することがわかる．しかし，S^1 には端をもっているというようなイメージがない．しかし最大値と最小値は存在する．

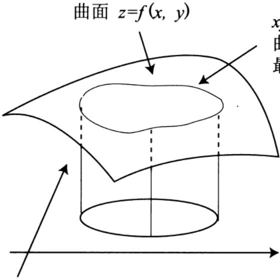


図 2-60　範囲が S^1 の曲面上の最大値・最小値

これらの例をみてもわかるように，単純に境界 (端) をもてば最大・最小値をもち，もたなければ最大・最小値をもたないと一般化するには単純すぎることがわかるであろう．

この考えをもっと一般化できないか考えてみよう．たとえば，位相空間を学んだ私たちであれば，円 S^1 に開集合 (近傍) を定義して，S^1 を位相空間にして，

$$\text{連続写像}\quad f: S^1 \to R$$

という円 S^1 上の点から実数を対応させる連続写像 (とりあえずは連続写像はつながっていると考えたらよい) を考えることができる．

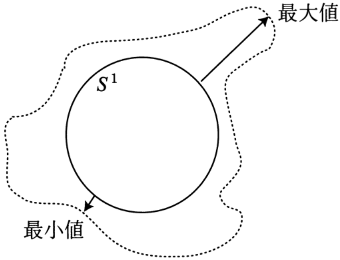


図 2-61　S^1 上の点から連続写像

そうすると，図 2-61 をみてもわかるように，最大値と最小値が存在することがわかるであろう．しかも，S^1 自身のみで考えている (S^1 において S^1 を考えている) ので，p.179 でもみてきたように，この場合 S^1 は境界 (イメージでは端の点) がなかった．しかし，実際は境界がなくても各点を実数を対応させた連続写像は最大値・最小値がある．生活に密着した例で考えると，地球上 (地球の表面 S^2) の任意の位置の温度をすべて観測してそのデータをつなげたとき (連続ということ)，必ず最高気温と最低気温が存在するということである．高校時代にも学んだ閉区間のみならず，範囲を閉区間の和集合 $[a, b] \cup [c, d]$ にしても最大値・最小値をとることも考えられる．

以上いろいろな実数値への連続写像の最大値・最小値をもつための範囲 (定義域) はどのような特徴があるかの例を解説してきたが，共通することは何であろうか．その答えの 1 つがコンパクトという概念である．結果を先にいうと，コンパクトという特徴を語る上でのポイントは，閉集合と有界性である．だから，閉区間 (閉集合) が無限個であれば範囲にきりがないので，この範囲でいくら実数値を対応させる連続写像を考えても最大値・最小値はもたないことは明らかにイメージがわくであろう．だから有界性 (後ほどきちんと定義する) という概念も大事である．

以下，このコンパクトという概念をユークリッド空間にほぼ限定して解説していく．ここで述べるコンパクトの解説は，コンパクト性のほんの一部分だけである．コンパクトという概念がどのように位相空間で役に立つのか述

べることは少ないが，コンパクトについてしっかりイメージできるのではないかと考えている．まずは言葉の説明である．

2.18.1　被覆・開被覆

コンパクトの定義をする前に，準備段階としていくつか言葉を説明しておこう．

位相空間 X の集合 A に対して，位相空間 X の**部分集合族** $\{V_\lambda|\lambda \in \Lambda\}$($\Lambda$ は添え字の集合) の和集合が A を包む，すなわち

$$A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$$

であるときに，この集合族は，A を**覆う**，あるいは A の**被覆**であるという．特に位相空間 X の**開集合族** $\{U_\lambda|\lambda \in \Lambda\}$($\Lambda$は添え字の集合) が A を包むとき，これを A の**開被覆**という．

2.18.2　定義：コンパクト性

位相空間 X の部分集合 A に対して，A の開被覆から**いつでも有限個のもの** $U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \cdots, U_{\lambda_n}$ を取り出して，それで A を覆ってしまうようにできる．つまり，

$$A \subset U_{\lambda_1} \cup U_{\lambda_2} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n}$$

のとき，A は**コンパクト**または，**コンパクト集合**という．特に，位相空間 X がコンパクトであるとき，**コンパクト空間**という．

大事なことは，X がコンパクトであるためには，**どんな**開被覆に対しても，その有限個の開被覆が存在しなければならないのということに注意する．X の 1 つの開被覆に対して有限個の開被覆が存在しただけでは，X はコンパクトとはいえないということに注意する．つまり，**X がコンパクトでないためには，有限個で覆える開被覆を含まない X の開被覆が 1 つでも存在すればよいということである．また，どうしても無限個でないと X を覆えないような開被覆が存在するということであるともいえる．**

まずこのコンパクトの定義をみたところで，イメージというものがわきにくい．どうしてこのような定義をするのか意味もなかなかつかめない．まず

は極端なことでもいいのでイメージを大事にしよう．必ず有限個の開集合で部分集合を覆えるということは，R^2 においては図 2-62 のようなイメージがわくであろう．

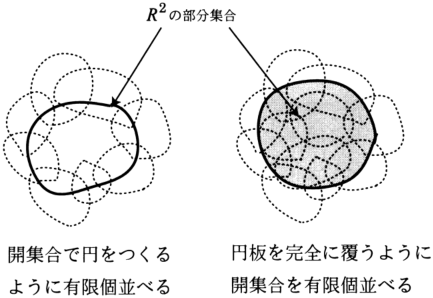


図 2-62　R^2 において有限個の開被覆で覆われるイメージ

同じようにして，R においても，開区間や閉区間が有限個の開集合で覆われるようなイメージをもつはずである (しかし，開区間は後から述べるが，必ずしも有限個の開集合で覆われるとは限らない．いまの段階ではあくまでもイメージである)．

ということはコンパクトの導入のところでも述べたが，コンパクトには有界性という概念が含まれているような感じを受ける (これは完全ないい方ではない．なぜなら，一般の集合の位相空間には有界という概念がないからである．とりあえずはイメージ重視でここは有界としておこう)．これは，必ず有限個の開集合で部分集合を覆えるという理由から，何となく意味がわかるであろう．まずはコンパクトのイメージをつけるために，有界性と有限性について考えてみよう．

コメント

コンパクトはわざわざ開被覆という言葉を用いないでも「開集合で覆う」といういい方をしてもいいのではないかと思っていた．開集合は，任意の点で近傍がとれる点という意味で定義して，この開集合の定義には

被うという意味がない．数学は，少しでも特徴をもったら名前をつける．だから,「覆う」という意味での開集合もきちんと数学で定義していないといけない．コンパクトの定義のところで,「開集合で覆える」といういい方をしないのもそのためだと私は考えている．

また，どうして閉集合を使って定義しないのかも私は考えた．位相空間を作っている細胞部分は開集合や近傍である (もちろん閉集合で位相空間を定義もできる)．しかし，数直線 R 上と平面 R^2 上で，閉集合と開集合を解説してきたが，どっちかというと閉集合の方がたくさん特徴を持っていることがわかるであろう．かつ開集合の方が非常にシンプルで特徴も少なかった．だから非常にシンプルな特徴の少ない開集合を使った方が，シンプルに定義できるからではないだろうかと私は考えている．

2.18.3　定義：有界と有限

実数の集合 R 上の有界性については，p.73 で解説した．これを一般の距離空間にさらに一般化すると次のようになる．

一般の距離空間 X において，その集合 A が**有界**であるとは，

$$A \subseteq B_\delta(x) \tag{2-69}$$

となるような点 $x \in X$ と $\delta > 0$ が存在するときである．

また，X を順序集合 (この本では詳しく述べないが，[14] など集合論の入門書を参考にしよう．簡単にいえば集合の元に数学的な大小関係が定義されている集合である) とする．A を X の部分集合とする．$\forall a \in A$ に対して，$a \leqq x$ となる $x \in X$ が存在するとき，A は上に有界であるという．

次に，有限集合の定義を述べよう．当たり前であるが，有限集合と有界は定義が全く違うので間違わないようにしよう．

空でない集合 A が**有限集合**であるとは，適当な自然数 $n \in N$(自然数の集合) に対して，

$$f : A \to \{1, 2, \cdots, n\}$$

という全単射 f が少なくとも 1 つ存在するときである．ちなみに空集合も有限集合の仲間に入れる．特に，$A \neq \varnothing$ のときは，この n は，A に対してただ 1 通りに定まる．わかりやすくいえば，有限個の元でできている集合である．

有限集合はコンパクト

任意の位相空間において，有限集合はコンパクトである

【解説・証明】

たとえば，R の部分集合 $\{1, 2, 3\}$ は有限集合である．もちろん，$[a, b]$ などは有限集合ではないことに注意．

一般に X の有限部分集合 $S = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ の任意の開被覆を $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ とすると，$i = 1, 2, \cdots, n$ に対して，$x_i \in V_{\lambda_i}$ となる $\lambda_i \in \Lambda$ が存在する．このとき，$S \subset V_{\lambda_1} \cup V_{\lambda_2} \cup \cdots V_{\lambda_n}$ とできる．よって，有限集合はコンパクトであることが証明された．ようは X の任意の開被覆を二重に数えなければよいことである．

離散位相のコンパクトについて

離散位相とは，その点を含む部分集合族すべてを考えたとき，開集合の公理を満たすということであった．つまり 1 点も開集合である．よって，有限集合でない離散位相 X を考えたとき，X はコンパクトではない．なぜなら 1 点の開被覆の集合族 $\{\{x\}|x \in X\}$ は有限部分被覆をもたないからである．つまり，$X = \{\{x\}|x \in X\}$ であるが，1 点でもかけると X を覆えなくなるからである．つまり無限個でないと X を覆えないということである．

逆にいえば，有限集合 (元が有限個) の離散位相は，二重に数えなければ，任意の部分集合は有限個で覆えるので，コンパクトとなる．有限集合の離散位相については，p.236 の位相空間を参照.

有限集合のである離散空間では，コンパクトであることがいえたので，有限個であるものは，コンパクトであることはそれなりにイメージできたと思う．

コンパクトの有界性について

次に有界性である．必ず有限個の開集合で覆うことができるので，ある程度の大きさで止まるということもイメージができるであろう．ある程度の大きさ以内になるということは有界であるということであるが，有界性は定義をみてもわかるように，元に順序が定義されていないといけないのがわかるであろう．たとえば先ほど紹介した有限集合の離散位相は，p.236 の位相空間の元には，順序 (大小関係) が定義されていないので，集合が有界かどうか判定するには意味がないし無理である．ということは，コンパクトは有界集合であるといういい方は厳密にはできないのである．厳密にはできないとは，距離空間であればコンパクト集合は有界といういい方ができるからである．なぜなら，一般の距離空間 X においては，X の部分集合 A がコンパクトであると，ε 近傍 (のようなもの) で，有限個で覆われるのであるから，n 個で覆われたとすれば，$\forall x, y \in A$ に対して，$d(x, y) < 2n\varepsilon$ となる．つまり，距離空間ではコンパクトならば有界ということはいつでもいえるのである．

2.18.4 コンパクトの具体例を考える

コンパクトの定義は難しいので，初心者にとって何が何だかわからないと思うので，いくつか具体例を与えよう．

コンパクト性を考える例

まずはコンパクトの定義をみてみよう．「位相空間 X の**部分集合** A に対して」という表し方になっている．つまり，A は x の相対位相の入った部分空間という考え方をしないでもいいということである．だから，A を覆う有限個の開被覆は，X の開集合 (開被覆) でもよいということである．もし A を**部分空間**として考えるのであれば，X からの相対位相を考えたらよい．

次のような R の開被覆 $\{(-\infty, a)|a \in R\} \cup \{(b, \infty)|b \in R\}$ を考える．この開被覆の集合から，たとえば 2 つの開集合 $(-\infty, 3)$ と $(1, \infty)$ の有限個の開被覆で

$$R = (-\infty, 3) \cup (1, \infty)$$

とできるので，コンパクトの定義が成り立つが，次のような R の開被覆 $\{(n,\, n+2) | n$ は自然数 $\}$ を考えたときは，どんな有限個の開被覆を考えても，有限個の開被覆を選んで R を覆えないのは明らかである．よって，有限個で被える開被覆を含まない R の開被覆が 1 つ存在したので R はコンパクトでないということがいえる．

また，導入のところで，コンパクトのポイントは閉集合であるということも述べた．また，コンパクト性を語るときは，閉集合を絡めて開集合と比較して議論するとわかりやすい．しかし，一般には閉集合ではない．また開集合を使ってコンパクトを定義するのであるが，有限個の開被覆で覆えるかどうかは，開集合の性質「無限個の開集合は開集合である」という性質が絡んでいるような気がする．次に，これについて解説していこう．

イメージでコンパクト性を考える例

以下，ユークリッドの距離による通常の位相が入っているものとする．開集合の無限個は開集合である．つまり，たとえば開区間 $(1,\, 2)$ をある開集合で覆うことを考えると，いろいろな覆い方がある．2 つの開集合 $(0.5,\, 1.6) \cup (1.5,\, 2.1)$ や，3 つの開集合 $(0.5,\, 1.2) \cup (1.1,\, 1.8) \cup (1.7,\, 2.1)$ などである．また，開区間の場合，開集合の無限個も開集合という性質から，開集合 $U_n = \left(1 - \dfrac{1}{n},\, 2 + \dfrac{1}{n}\right)$ とおくと，

$$\bigcup_{k=3}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k},\, 2 - \frac{1}{k}\right) = (1,\, 2)$$

というように，開区間の場合は，有限個の開集合でも覆うことができるし，場合によっては無限個の開集合でしか完全に覆うことができない場合もある．**無限個ではじめて完全に覆えるので，この中から有限個の開被覆を選んでも開区間覆えない**ことが逆に言える．

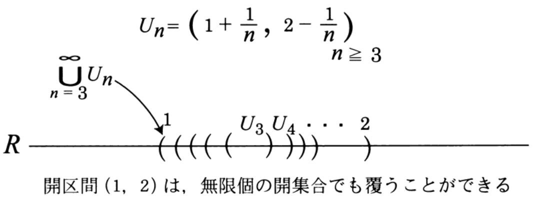


図 2-63 開区間は無限個の開集合で完全に覆うことができる

しかし，閉区間の場合はどうであろうか．閉区間 [1, 2] を考えよう．この閉区間は通常の位相が入っている場合，R において閉集合である．

図 2-64 をみてもわかるように，どんな無限集合の開区間 (開集合) をもってきても，開区間の無限集合は開集合なので閉集合になることはないので境界部分の端の 1 と 2 も覆うようにするには，必ず 1 と 2 をすっぽり覆うような開区間が必要になってくることがイメージでわくだろう．このとき，

$$\bigcup_{k=3}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k},2-\frac{1}{k}\right)=(1,2)\subset[1,2]$$

であるので，たとえば R の開集合 (0.5, 1.1), (1.9, 2.1) を使うことによって，閉区間 [1, 2] を覆うことができるが，$\left(1+\frac{1}{k},2-\frac{1}{k}\right)$ の中の有限個を使って，あわせて有限個の開集合でしか [1, 2] を覆うことしかできないことに注目 (図 2-64 参照).

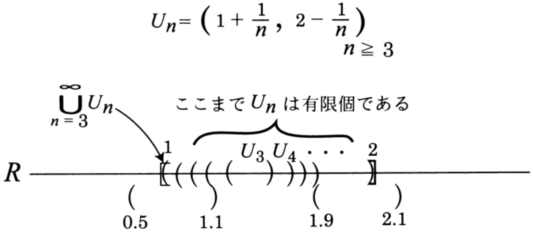


図 2-64 閉区間は有限個の開集合で覆うことができる

また，たとえ閉区間 [2, 3] を完全に覆う無限個の開被覆 $\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}, 5-\frac{1}{k}\right)$ を考えても，その中から 1 つの開区間 $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$ を 1 つ選べば，

$$[2, 3] \subset \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

と有限個の開被覆で包むことができる．

この考えを R からユークリッド平面 R^2 に拡張しよう．ここでも R^2 は，ユークリッドの距離による標準の位相空間とする．

ここでは，位相空間 R^2 の部分集合円 S^1 を考えよう．位相空間として R^2 を考えているのであるから，開集合は図 2-65 のような 2 次元の境界をもたない集合である．もし，位相空間 S^1 において S^1 を考えるのであれば，p.181 の図 2-20 のような 1 次元の開集合になることに注意する．いずれにしても，開集合の無限個も開集合であるから，イメージは端を含まないということである．ということは，S^1 を R^2 の無限個の開集合で覆うとき，図 2-65 のようなぎりぎりのところで S^1 を覆うことができない場合がある．

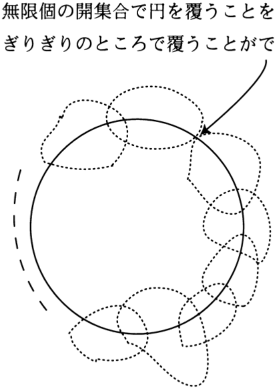


図 2-65　円は無限個の開集合で覆うことができない場合がある

しかし，図 2-66 のような開集合の無限個の終わりのぎりぎりところを覆うように開集合を 1 つ用意すると，円 S^1 は完全に覆うことができる．このとき，ぎりぎりの所まで無限個あった開集合の中から有限個を選んだら，有限個の開集合で S^1 を覆うことができる！ということである．

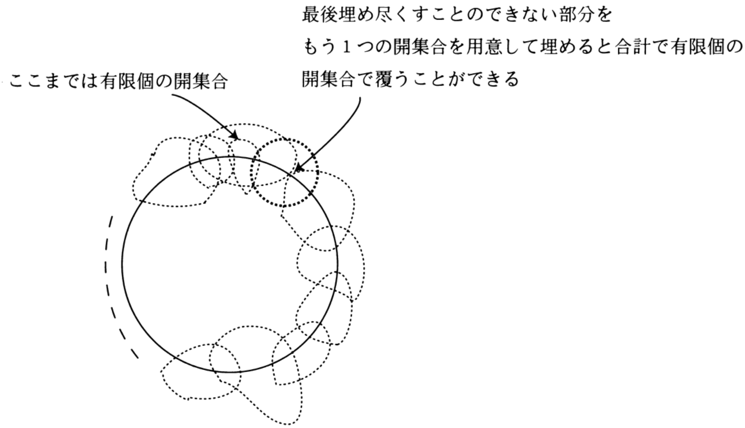


図 2-66　円は有限個の開集合で覆うことができる

以上が，コンパクトのイメージ重視の解説である．それでは次に，数学的にきちんとコンパクトの証明をしてみよう．

2.18.5　R において，閉区間 $[a, b]$ はコンパクトである（ハイネ-ボレルの被覆定理）

R において，閉区間 $[a, b]$ はコンパクトである

【解説】

この定理はあまりにも有名で，コンパクト性を学んだ以上は，避けては通れない定理であるし，必ず理解をしておかないといけない定理でもある．ま

た有限開被覆であることの証明のやり方を教えてくれる証明でもある．時間はかかるかもしれないが，きちっと理解をしておこう．証明をみてもいきなり感があることは否定できないが，いっていることの意味がわかればそれでよしとしよう．

また証明には，実数の連続性と Cantor の区間縮小法の原理が使われるので，これらについても，証明した後の解説で解説もする．そしてまた，なぜ開区間ではダメなのかも説明しておく (実数の連続性の証明には，[2] が一番よいと経験上考える)．

【証明】

$[a, b]$ がコンパクトでないと仮定する．つまり R の開集合族 F からいかなる有限個の開集合を選んできても $[a, b]$ を覆うことができないと仮定する．

そのとき，閉区間 $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$，$\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$ の少なくとも一方は，F に属する開集合によって有限個で被覆できない．たとえば，$\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$ が F の有限個で被覆できないときは，$a = a_1, b_1 = \dfrac{a+b}{2}$ とおき，$[a_1, b_1]$ は有限個の開集合で被覆できないとする．次に，閉区間 $\left[a_1, \dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$，$\left[\dfrac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ の少なくとも一方は，F に属する開集合によって有限個で被覆できない．たとえば有限個で被覆できない方を，たとえば $\left[\dfrac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$，
$a_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}, b_2 = b_1$ とおき，このような操作を続けていく．このとき，有限個の開集合で被覆できない閉集合の族，

$$[a, b] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \cdots$$

を定めることができる．このとき，

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}} \to 0 (n \to \infty)$$

である (p.366 の図 2-67 参照)．

よって区間縮小法の原理によって，すべての閉区間 $[a_n, b_n]$ に共通に含まれる実数 c がただ 1 つ存在する．つまり，$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$，$\lim_{n\to\infty} a_n =$

$\lim_{n\to\infty} b_n = c$ ということである．このとき，$c \in [a, b]$ である．なぜなら，閉区間 $[a, b]$ は，R において閉集合なので，閉区間 $[a, b]$ に属する数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の極限値 c は $[a, b]$ に属するからである．

よって，$c \in [a, b]$ であるから F の元 U で，$c \in U$ となる開集合が存在する．このとき U は開集合であるから，c においても ε 近傍 $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset U$ となるものが存在する．

ここで，$\lim_{n\to\infty} a_n = c$ より，ある番号 M_1 が存在して，$n > M_1$ を満たす番号 n に対して，$|a_n - c| < \varepsilon$ とできる．つまり，$a_n \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ であり $c - \varepsilon < a_n$ である．同様に $\lim_{n\to\infty} b_n = c$ より，ある番号 M_2 が存在して，$n > M_2$ を満たす番号 n に対して，$b_n < c + \varepsilon$ とできる．

よって，$M = \max\{M_1, M_2\}$ とおくと，$N > M$ となるある自然数 N に対して，$c - \varepsilon < a_N < b_N < c + \varepsilon$ が成り立つ．すなわち，
$[a_N, b_N] \subseteq (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ となる．これは $[a_N, b_N]$ が F に属されるただ 1 つの開集合 U により，被覆されることになったことを意味する．$[a_N, b_N]$ はその作り方より有限個の F の元で覆えないはずだったのに，ただ 1 つの開集合で覆えてしまった．これは仮定に矛盾する．よって，$[a, b]$ はコンパクトである．

【解説 2(Cantor の区間縮小法の原理)】

この証明には，実数の連続性が使われているということを述べたが，まずはこれについて説明しよう．実数の連続性を語るには，このハイネボレルの定理で使った Cantor の区間縮小法の原理という実数の連続性と同値な原理が必要である．

実数の連続性の大事な性質，**有理数で作られる閉区間を小さくしていったとき，必ず残る数は有理数とは限らなく，無理数という数の存在が必要になる．**これを具体例で示すことにしよう．具体例には，p.290 の式 (2-56) で述べた収束する数列を使う．

数列

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 2}{a_n + 1},\ a_1 = 1 \tag{2-70}$$

を考えたとき，一般項は

$$a_n = \frac{2\sqrt{2}+4}{(-1)^n(1+\sqrt{2})^{2n+1}-1-\sqrt{2}}+\sqrt{2} \tag{2-71}$$

であった．この数列の奇数項は単調増加で，偶数項は単調減少であることは証明しないで使っていく (というより，$n=2k$，$n=2k-1$ を代入して確かめればわかることである)．この偶数・奇数項の特性を生かし，次のような閉区間を作って，数直線上においてみることにする．

$$[a_1,\, a_2],\, [a_3,\, a_4],\, [a_5,\, a_6], \cdots,$$

つまり，

$$\left[1, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{7}{5}, \frac{17}{12}\right], \left[\frac{41}{29}, \frac{99}{70}\right], \cdots$$

と数直線上に閉区間を並べていくのである．すると，$n \longrightarrow \infty$ としたときに，閉区間の右側と左側は $\sqrt{2}$ に収束して，**ただ 1 つ**の実数に収束することが直感的にわかるであろう．有理数でつくった数列の極限値が無理数で，実数の集合 R に $\sqrt{2}$ という無理数をきちんと定義しておかないと，R がちぎれてしまうということである．これが実数の連続性である．

さて，区間縮小法の原理であるが，これは次のようなものである．

Cantor の区間縮小法の原理

閉区間を $I_n = [a_n,\, b_n] (n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおくと，

(1) $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$
(2) $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ (閉区間の長さが 0 に収束するということ)

が成り立つとき，**閉区間に属する**ただ 1 点 α が存在して，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha = \lim_{n\to\infty} b_n$$

が成り立つ．

この定理の意味は，閉区間を限りなく小さくすると，閉区間をせまくするたびに，多くの実数が離れていくが，必ず 1 つの実数だけ離れないで残ると

いうことである．大事なことは，もしこの数列が収束値を含めて有理数のみで考えていれば，ひょっとしたら α が存在しないかもしれないということである．有理数から無理数まで数字の世界を広げたからこそできる原理である．証明する前に，さらに具体的な注意を促しておこう．

例

大事なことは，閉区間ということ．開区間であれば，たとえば

$$I_n = \left(1 - \frac{1}{n}, 1\right)$$

は，(1)，(2) を両方満たす．つまり，$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ であるし，区間の幅が 0 に収束する．しかし，$\bigcap_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}, 1\right) \to \{1\}$ は，$\left(1 - \frac{1}{n}, 1\right)$ に属さない．よって閉区間の区間縮小法の原理を使って証明しようと思っても，極限値が開区間からはみ出す場合がある (開区間の点でない場合がある) ので，開区間を覆うという仮定が使えない．

例

条件のどちらか 1 つが欠けてもだめである．たとえば，条件 (1) のみだけとしよう．次のような具体例が考えられる．

$$\text{閉区間 } I_n = \left[2 - \frac{1}{n}, 5 + \frac{1}{n}\right]$$

は，(1) は満たす．しかし $a_n = 2 + \frac{1}{n}$，$b_n = 5 - \frac{1}{n}$ とすると，極限値は $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$，$\lim_{n\to\infty} b_n = 5$ である．2 つの実数が残り，極限値はただ 1 つだけとはならない．

それでは証明に入ろう．

【区間縮小法の証明】

閉区間 I_n の作り方から，

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots a_n \leqq \cdots \leqq b_n \leqq \cdots \leqq b_2 \leqq b_1$$

より

$$a_1 \leqq a_n \leqq b_n \leqq b_1$$

よって，

$$a_n \leqq b_1 \text{ または } a_1 \leqq b_n$$

となり，$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はそれぞれ上と下に有界な単調増加と単調減少な数列である．上に有界な単調増加数列と下に有界な単調減少数列は収束するが，b_1 と a_1 は上限でないことに注意する．$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は収束するので，その収束値をそれぞれ α，β とすると，条件 (2) より

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \beta - \alpha = 0$$

より

$$\alpha = \beta$$

となって証明できた．

コメント

証明の最後のところで注意することがある．$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n$ の部分であるが，これは単純に lim の線形性を使っているのではない． $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$， $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ がいえるからこそ lim の線形性が使えるのである．

【解説 3】

ハイネボレルの定理で，無限個でしか覆えない閉区間を半分にして作っていった．これについて，図で簡単に説明しておこう．

$$I = [a, b]$$

に対して，閉区間の中点 $\dfrac{a+b}{2}$ を考え，それぞれ $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$，$\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$ のどちらかが無限個の開被覆でしか覆えないとするのであるが，この場合，

$$\cdot\ a_1 = \frac{a+b}{2} \text{ かつ } b_1 = b$$
$$\cdot\ a_1 = a \text{ かつ } b_1 = \frac{a+b}{2}$$

と定義して，

$$I_1 = [a_1, b_1]$$

とする．また次にこの閉区間の中点 $\dfrac{a_1+b_1}{2}$ を考え，それぞれ $\left[a_1, \dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$，$\left[\dfrac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ のどちらかが無限個の開被覆でしか覆えないとするのであるが，この場合，

$$\cdot\ a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} \text{かつ}\ b_2 = b_1$$
$$\cdot\ a_2 = a_1 \text{かつ}\ b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$$

と定義して，

$$I_2 = [a_2, b_2]$$

とする．

このような，やり方で定義された閉区間の幅はどのようになるだろうか．図 2-67 のような閉区間 $[a, b]$ をとり，具体例で考えてみることにしよう．

$$\begin{aligned} b_1 - a_1 &= b - \frac{a+b}{2} \\ &= \frac{b-a}{2} \end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned} b_1 - a_1 &= \frac{a+b}{2} - a \\ &= \frac{b-a}{2} \text{(つまり結果は同じ．以下同様.)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 - a_2 &= \frac{a_1+b_1}{2} - a_1 \\ &= \frac{b_1-a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3 - a_3 &= \frac{a_2+b_2}{2} - a_2 \\ &= \frac{b_2-a_2}{2} = \frac{b-a}{2^3} \end{aligned}$$

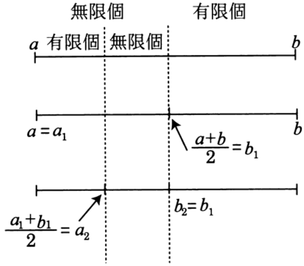


図 2-67　区間縮小の作り方

以下同様にして,

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

となる.

このように続けると,

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$$

となり，しかもかつ

$$0 < b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} < \frac{b-a}{n} \to 0 (n \to \infty)$$

これはつまり,

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$$

ということで,

よって，区間縮小法の原理より,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$$

となる $\alpha \in [a, b]$ が存在するとうことである.

2.18.6　ハウスドルフ空間とコンパクト性

ハウスドルフ空間 X の**部分集合** A がコンパクトであるならば，A は X の閉集合である．

【解説】

私はコンパクトの導入のところで，コンパクト性は閉集合がポイントであると述べたがコンパクトな空間は必ず閉集合であるだろうか．それについて考えたいが，ポイントは位相空間がハウスドルフ空間かどうかである (もちろんそれだけではない).

コンパクト性は，実はハウスドルフ空間において，特に重要で威力を発揮する．ブルバキの数学原論の流れに従えば，コンパクトの定義は，ハウスドルフ空間ということを仮定をしている．この本では，ハウスドルフ空間を仮定しないで解説する．

まず次に紹介する証明であるが，この証明は自分では思いつかない．読んで理解できたらとりあえずは十分である．問題の仮定がどのように利用されているかを，吟味しながら理解するとよいし，逆に証明の仮定をとると定理が成り立たないという反例を見つけられればよいという気持ちをもとう．

【証明】

A の補集合 $X-A$ が開集合であることを示せばよい．$p \in X-A$，$q \in A$ をとると，$p \neq q$ である．よってハウスドルフ空間であるから，$U_p \cap V_q = \varnothing$ となる X の開集合 U_p と V_q がある．

ここで，p を固定して，q を A 全体で動かすと，開集合族 $\bigcup_{q \in A} V_q$ は A を覆う．つまり，$A \subset \bigcup_{q \in A} V_q$ である．

ここで仮定より，A はコンパクトであるから，この開被覆の中から有限個の開集合 $V_{q_1}, V_{q_2}, \cdots, V_{q_n}$ を選んで，

$$A \subset V_{q_1} \cup V_{q_2} \cup \cdots \cup V_{q_n}$$

とできる．

各 V_{q_i} に対応して，p を含む開集合 U_{p_i} で $U_{p_i} \cap V_{q_i} = \varnothing$ となるものが決まる．ここで，U_{p_i} の共通集合 $U_{p_1} \cap U_{p_2} \cap \cdots U_{p_n}$ は，有限個の開集合の共通部分集合なので，もちろん開集合である (この展開を見てもわかるように，いくらハウスドルフ空間を仮定していても，A がコンパクトでなければ，A を覆う開被覆は無限個の場合もあるので，この場合 $U_{p_1} \cap U_{p_2} \cap \cdots U_{p_n} \cap \cdots$ となり無限個の場合開集合の共通部分は開集合になるとは限らないということである).

この共通部分を $U = U_{p_1} \cap U_{p_2} \cap \cdots U_{p_n}$ とおく．U は p を含む開集合であり，$U \cap V_{q_i} = \varnothing$ だから，$U \cap V_{q_1} \cup V_{q_2} \cup \cdots \cup V_{q_n} = \varnothing$ である．$A \subset (V_{q_1} \cup V_{q_2} \cup \cdots \cup V_{q_n})$ だから，$U \cap A = \varnothing$ である．よって，$U \subset X - A$ となり，$X - A$ の任意の点 p で開集合がとれたので，$X - A$ は開集合，つまり A は閉集合となる．

ハウスドルフ空間でないときのコンパクト性を考える

このハウスドルフ空間でない位相空間ではコンパクト集合であっても閉集合にならないことを解説しよう．

一番わかりやすく思いつきやすい例は，R において密着位相を入れた位相空間である．密着位相空間であれば，R の開集合がただ R，1 つで (R，1 つしか開集合を考えてはいけない)，もちろんハウスドルフ空間ではない．このとき，たとえば $(a, b) \subset R$ と有限個 (1 個) の開集合で覆われるので，コンパクトである．しかし $(a, b)^c = (-\infty, a] \cup [b, \infty)$ の任意の点で，近傍がとれないので (密着位相の任意の点の近傍は R である) 開集合ではない．よって，(a, b) は閉集合ではない．

次に，n 次元ユークリッド空間 R^n において，部分空間がコンパクトであるための，必要十分条件を説明する．これは，位相空間でコンパクトを学んだときに，これは絶対に避けて通れない学ぶべきことである．しかもイメージしやすい定理でもある．その前に，その準備となる定理を説明しておこう．かなり抽象的であるが，1 行 1 行吟味しながら読んでほしい．

2.18.7　コンパクト空間 X の閉集合 A はコンパクトである

コンパクト空間 X の閉集合 A はコンパクトである

【解説】

$\{U_\lambda|\lambda \in \Lambda\}$ を A の任意の開被覆とする．U_λ は A の開被覆だから，$U_\lambda = H_\lambda \cap A$ となる X の開集合 H_λ が存在する (相対位相を参照)．このとき，

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda \supseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = A$$

である．よって，A は仮定より閉集合であるから，$X - A$ は開集合で $X = (X - A) \cup \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda\right)$ が成り立つ．これは X が X の開集合の和集合で表されたことを意味する．つまり，$(X - A) \cup \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda\right)$ は X の開被覆である．X はコンパクトより，この中から有限個の開集合を選んで，$X = (X - A) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} H_{\lambda_k}\right)$，または $X = \bigcup_{k=1}^{n} H_{\lambda_k}$ となるような，有限個の開集合 (開被覆)$H_{\lambda_k}(\lambda_k \in \Lambda)$ が存在する．

このとき，$A = X \cap A = \bigcup_{k=1}^{n}(H_{\lambda_k} \cap A) = \bigcup_{k=1}^{n} U_{\lambda_k}$ が成り立ち，A はコンパクトである．

2.18.8　ユークリッド空間において部分空間がコンパクトになる必要十分条件

n 次元ユークリッド空間 R^n の部分空間 A がコンパクトである

$$\Updownarrow$$

A が R^n の有界な閉集合になる

【解説】

ここでは，2 次元ユークリッド空間 R^2 としておこう．コンパクトで一番大事といっても過言でないこの定理は，ユークリッド空間 (ユークリッドの距離を入れた R や R^2) ではじめて同値な条件として成り立つのである．証明は少ないが，最も大事な性質である．同値であるから，参考図書 [16] では，ユークリッド空間において有界閉集合の部分集合をコンパクトというと定義している．

一般には，ここでは証明しないが

X が距離空間ならば「コンパクト⇒有界閉集合」

はいえるが，逆は成り立たない．その具体例を後ほど紹介しよう

またこの定理の証明には，$[a_1, b_1], [a_2, b_2]$ はそれぞれコンパクトであれば，積空間 $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ もコンパクトであることを，証明なしで使っている．結構証明がややこしいので，イメージとして，$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ は長方形をイメージしておけば十分である．また積空間もこの本では解説していないが，積空間については [14] などを参考にしよう．初歩的な位相空間論の本にも載っている．

【証明】

同値の証明なので，2 つにわけて証明しよう．

(A がコンパクト ⇒ 有界閉集合) ユークリッド空間 R^2 はハウスドルフ空間なので，A がコンパクトであれば，A は閉集合である．また有界性であるが，$\varepsilon > 0$ を固定すると，$\{B_\varepsilon(x) \cap A | x \in A\}$ は A の開被覆で，A がコンパクトであるから，適当な $x_1, x_2, \cdots, x_n \in A$ が存在して，$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$ が成り立つが，このことから A が有界であることをいっている．

(A が有界閉集合 ⇒ コンパクト) A が有界であるから，適当な $a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$ が存在して，$A \subseteq [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ とできる．$[a_1, b_1], [a_2, b_2]$ はそれぞれコンパクトであるから，$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ もコンパクトで，つまり，A はコンパクト空間の閉集合であるから A はコンパクトとなる．

ユークリッド空間において有界閉集合の例 (コンパクトの例)

たとえばユークリッド空間 R において，閉区間 $[a, b]$ はコンパクトである．なぜなら，有界であり閉集合であるからである (明らかなので証明は略す)．明らかにコンパクトの和集合もコンパクトであるから，

コンパクトの導入のところでも述べたが，ユークリッド空間 R^2 において円 S^1 はコンパクトである．有界というイメージであればなんとなく端があるというイメージであるが，S^1 には端がない．R^2 における，コンパクトの例の代表格が，私は S^1 と考えている．有界閉集合といって，有限個の開集合で覆える図形といえば，p.352 の図 2-62 の右側のような閉集合を思い浮かべるはずであるが，左の閉曲線も考えられるようになってほしいと思う．

R^2 において，円 S^1 がコンパクトであることを証明しよう．S^1 が R^2 において閉集合であることが，p.159 の節で証明されている．次に有界性であるが，たとえば，$S^1 \subset B_5((0, 0))$ となる，$(0, 0) \in R^2$ と $\varepsilon = 5$ がとれるので，有界である．よって，S^1 は有界閉集合なので，R^2 において，円 S^1 がコンパクトである．

【解説 1】

さて，ユークリッド空間において，閉区間や円は閉集合．つまりコンパクトな集合は閉集合が多かった．一般にコンパクトな集合は閉集合といえるか．答えはノーである．一番わかりやすい例が，密着位相においての部分集合である．簡単に説明しておこう．たとえば R に密着位相を定義している場合，この位相空間には開集合が R と $\varnothing$ しかないので (a, b) を覆う開集合は R，1 つ (有限個) である．よって，密着位相空間において (a, b) は，コンパクトである．しかし，$\mathrm{Int(a,\ b)}^c = \mathrm{Int}\{(\infty, a] \cup [b, \infty)\} = \varnothing$ より (任意の点で開集合 R を含まないので)，(a, b) は閉集合ではない．

距離空間において有界閉集合であるにもかかわらずコンパクトでない例

離散距離空間 R を考えよう．R の部分集合 A をたとえば，$A = [3, 5]$ としよう．

p.205 でも解説したように，離散距離空間では，1 点も開集合であった．つまり，$x \in R$ に対して，$\mathrm{Int}\{x\} = \{x\}$ ということである．もちろん，

$A=[3,5]$ も $\varepsilon<1$ に対しては，$B_\varepsilon(x)=\{x\}$ でもあったので，$A=[3,5]$ は任意の点 $p\in[3,5]$ において，$B_\varepsilon(p)=\{p\}\subset[3,5]$ とできるので，
$A=[3,5]$ は開集合である．また，$[3,5]^c=(-\infty,3)\cup(5,\infty)$ の任意の点で ε 近傍がとれるので $[3,5]^c$ は開集合である．よって，$[3,5]$ は閉集合でもある．

また，$\varepsilon\geqq 1$ に対しては，$B_\varepsilon(x)=R$ であったので，たとえば $\varepsilon=5$ として，$A=[3,5]\subset B_5(x)=R$ となる，ε と $x\in R$ が存在したので $A=[3,5]$ は有界閉集合となる．

先ほども述べたように．離散距離空間では 1 点も開集合なので，

$$A=[3,5]=\bigcup_{\lambda\in A}\{x_\lambda\}$$

とでき，1 点 $\{x\}$ だけからなる開集合族は $A=[3,5]$ の開集合族となるが，1 点でも欠けると $A=[3,5]$ にはならないため (逆にいえば無限個ではじめて $A=[3,5]$ になる)，コンパクトではない．つまり有界閉集合であるがコンパクトではないのである．

最後に，コンパクト性を学んで，是非学んでおきたい性質がある．これはコンパクトの導入で解説した最大・最小値に関連することである．これを学ばずにして，コンパクト性の勉強を終えるには少しもったいない．それを解説する前に，最大・最小値の証明で使う定理を解説しておこう．

2.18.9　定理：コンパクト集合 A の連続写像による像 $f(A)$ はコンパクト

X, Y を位相空間 (開集合が定義されている集合)，$f:X\to Y$ を連続写像とする．$A\subset X$ が X のコンパクトな部分集合ならば，$f(A)\subset Y$ は Y のコンパクトな部分集合である．

【証明】(証明はそれほど難しくない．開集合の逆像が開集合であるという連続写像の定理が活用される)

A を X のコンパクトな部分集合として，$f(A)$ をその像とする．$\{U_\lambda\}(\lambda\in\Lambda)$ を $f(A)$ の開被覆とする．f は連続写像であるから，任意の U_λ に対して，$f^{-1}(U_\lambda)$ は X の開集合であり，$A\subset\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(U_\lambda)$ である．A はコンパクト

集合であるので，この中から有限個の，$f^{-1}(U_{\lambda_1}), f^{-1}(U_{\lambda_2})$, $f^{-1}(U_{\lambda_3}), \cdots, f^{-1}(U_{\lambda_n})$ を選んで，$A \subset f^{-1}(U_{\lambda_1}) \cup f^{-1}(U_{\lambda_2}) \cup f^{-1}(U_{\lambda_3}) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_{\lambda_n})$ とでき，またこれを f で写すと，$f(A) \subset U_{\lambda_1} \cup U_{\lambda_2}) \cup \cdots U_{\lambda_n})$ となり，$f(A)$ はコンパクトである．

2.18.10　コンパクト性を使った最大・最小値の定理

コンパクトな位相空間 X で定義された実数値の連続関数 $f : X \to R$ は，最大値および最小値をとる．

【証明】

f は連続写像より，$f(X)$ は R においてコンパクト集合である．よって，$f(X)$ は R において (有界) 閉集合である．

したがって，有界であれば上限，下限が存在するので，$a = \sup\{f(x)|x \in X\}$，$b = \inf\{f(x)|x \in X\}$ とすれば，a(または b) $\in \overline{f(X)} = f(X)$ となり，$a = f(p)(b = f(q))$ となる p, q が存在する．

コンパクト性を使った最大・最小値の定理の応用 (閉区間の和集合)

高校時代にたくさん解いてきた閉区間 $[a, b]$ においての関数の最大最小値の問題は，$f : [a, b] \to R$ と考えられ，コンパクト集合から実数値の連続関数の写像というとらえ方ができ，よって最大値・最小値をもつと考えることができる．

これを応用して，有限個のコンパクトの和集合はコンパクトである (なぜなら，コンパクトは閉集合だから閉集合の定義より閉集合で，有限個であるから有界である)．直感的に定義域を $[a, b] \cup [c, d]$ として $f : [a, b] \cup [c, d] \to R$ と考えても最大値最小値をとることは明らかであろう．

もちろん，R において有限個の点の集合 $a_1 \cup a_2 \cup \cdots \cup a_n$ は，コンパクト集合で ($a_1 \cup a_2 \cup \cdots \cup a_n$ は有界閉集合だからである)，これらの集合から実数値を対応する連続写像を考えると，直感的に最大値と最小値をもつことがわかるであろう．このように一般化できるのである．

コンパクト性を使った最大最小の具体例 (有限集合からの対応)

地球にいる人間の集合を考え，各人間に対して，身長 (体重)(つまり実数値) を対応させる写像 g : 地球上の人間 $\to R$ を考えると，必ず身長 (体重) の最大値と最小値が存在する．

ここでは，考えやすくするために地球の人間 a, b, c3 人として考えよう．集合 $A=\{a, b, c\}$ に対して，$g(a)=160cm, g(b)=170cm, g(c)=180cm$ とする．集合 A には離散位相を考え，R にはユークリッドの位相が入っているものとする．このとき，有限集合の離散位相空間 A はコンパクトであることは，p.353 の節で述べたとおりである．まずこの写像 g が，各点において連続であることを証明しよう．a においての連続性であるが，$f(a)=160 \in R$ においての任意 ε 近傍 $B_\varepsilon(160)$ に対して，ある a の近傍 $\{a\}$ がとれ，任意の点 $a \in \{a\}$ に対して，$g(a) \in B_\varepsilon(160)$ とできるので，写像 g は a において連続である．同様にして，b, c においても連続であるので，g は連続写像である．よって，コンパクト空間 A から R へ実数値である身長 (体重) を対応させる写像は連続写像となった．よって，この連続写像は最大値と最小値をもち，最大値は c において $180cm$ をとり，最小値は a において $160cm$ をとることがいえるのである．

地球上の人間の集合を考えたときには，有限集合でありしかも離散位相を考えればコンパクトとなり，必ず地球上の人間には，最も大きい人と最も小さい人がいるということが数学的に証明されたのである．

コンパクト性を使った最大最小の具体例 (地球上の気温について)

地球上の気温には，必ず最も高い地点と最も低い地点がある

これも，地球上の任意の位置の気温 (実数値) を対応させる写像を考えると，これは地球全体の気温がつながっているので連続写像である．イメージは p.350 の図 2-61 を参照しよう．地球の表面は球面 S^2 であり，S^2 は R^2 において有界閉集合であるから，コンパクトである．よってコンパクト空間 S^2 から実数値を対応させる連続写像は最大・最小値をもつので，地球上の気温には必ず最も高い地点と最も低い地点があるとなる．

このように位相空間は，数学の世界だけでなく現実の社会にも応用を広げることができるということである．

コメント

位相空間 X の部分集合 A が相対位相でコンパクトであるとき，A をコンパクトであるといういい方をする．つまり，A を覆うような X の開部分集合族 $\mathfrak{U} = \{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ があれば，$\mathfrak{U}_A = \{A \cap U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ は相対位相で A の開被覆になる．$\mathfrak{U}_A$ が有限個の部分開被覆をもつとき A はコンパクトというわけである．この定義はきわめて自然な定義で，空間がコンパクトであるということと，その部分集合がコンパクトであることとは，そんなに意識的に区別しないで使っていると経験上考えている．

たとえば，S^1 は R^2 においてコンパクトであった．よって，S^1 自身をのみで考え位相空間と考えたとき，S^1 はコンパクトであるといういい方をしてもかまわないということである．

2.18.11　コンパクトについて後書き

コンパクトを「完閉」と訳す数学者は多い．いままでの議論から何となくその云わんとすることが伝わってくる．通常私たちが使うコンパクトの意味は， 小形で中身が充実しているという意味で，位相空間でのコンパクトのイメージとしては，位相空間の細胞にあたる開集合をいくつか選ぶだけで十分その部分集合の様子を語ることができるという意味と考えたらよいであろう．つまり充実した？集合と考えたらよい．数学では有限であればありがたいことがたくさんある．このありがたさは奥が深く，私も完全に理解しているとはもちろんいいがたい．このありがたみを伝えきれていない．

いろいろな位相空間を考えていく上で，いろいろな例外が出てきて，一概にコンパクトは閉集合でもないし，逆に閉集合の特徴を述べたものではないことはわかったはずである．だから，まさにコンパクトは，有限個の開集合で必ず覆えるという定義がやはり大事になってきて，それを十二分に使っていろいろな性質を考えていくのが一番よいように思う．使い方としては，「A

はコンパクト集合であるから，必ず有限個で覆える開被覆が存在するので」という使い方ができるようにしないといけない．だから，コンパクト集合の場合，ひょっとしたら位相空間の細胞である開集合を無限個使わないと覆うことができないかもしれないという心配はいらないのである．

またコンパクト性について，いろいろな反例をみつけるとき，離散位相や密着位相などの極端な位相空間を使って述べてきた．だから，コンパクト性を理解する上では，離散位相や密着位相は非常に大事な位相空間ともいえる．

位相空間を学ぶにあたって，コンパクト性は非常に大事な概念である．点列コンパクト，局所コンパクト，パラコンパクト，コンパクト距離空間，コンパクト化などいろいろな種類のコンパクトに関連した定義がある．これも少しでも特徴をもったら名前をつけるという，位相空間論の言葉の定義の特徴の 1 つといっても過言ではないだろうか．また，ここでは述べていないが，コンパクトな部分集合から R への連続写像は一様連続である (この本では一様連続については述べていない) など，コンパクトを使った定理もたくさんある．

このように，コンパクトの内容は豊富で，これらのコンパクトの内容を懇切丁寧に解説すれば，コンパクトの内容だけで本が 1 冊できるくらいの量である．コンパクトのことをどこまで学べばよいのか，個人差があるが，コンパクトとはこういうものだといえるようになるくらいまでは，理解できてほしいと思う．コンパクトについては，参考図書 [14] などを参考にするとよいだろう．

参考文献

[1] 村上仙瑞 著,『直感でつかむ大学生の微積分』, 東京図書, 2007
[2] 田島一郎 著,『解析入門』, 岩波全書, 1981
[3] 細井 勉 著,『わかるイプシロン・デルタ 』, 日本評論社, 1995
[4] 瀬山士郎 著,『「無限と連続」の数学——微分積分学の基礎理論案内』, 東京図書, 2005
[5] 大学への数学『解放の探求 II』, 東京出版
[6] 大学への数学『新数学演習』, 東京出版
[7] 田島一郎 著,『イプシロン-デルタ (数学ワンポイント双書 20)』, 共立出版, 1978
[8] 大田春外 著,『はじめよう位相空間』, 日本評論社, 2000
[9] 石谷　茂 著,『$\varepsilon - \delta$ に泣く』, 現代数学社, 2006
[10] 石谷　茂 著,『初めて学ぶトポロジー』, 現代数学社, 2000
[11] 一樂重雄 著,『意味がわかる位相空間論』, 日本評論社, 2008
[12] 小林貞一 著,『集合と位相』, 培風館, 1977
[13] 瀬山士郎 著,『なっとくする集合・位相』, 講談社, 2001
[14] 竹之内脩 著,『入門集合と位相』, 実教出版, 1971
[15] 森毅 著,『位相のこころ』, 現代数学社, 1975
[16] 横田一郎 著,『群と位相』, 裳華房, 1971
[17] 野口　廣 著,『トポロジー　－基礎と方法－』, 筑摩書房, 2007
[18] 亀谷俊司 著,『集合と位相 （復刊）』, 朝倉書店, 2004
[19] 矢野公一 著,『距離空間と位相構造』, 共立出版株式会社, 2009
[20] 彌永昌吉, 彌永健一著,『集合と位相☒』, 岩波書店, 1977
[21] 柴田敏男著,『集合と位相空間』, 共立出版株式会社, 1972

索引

◉著者略歴

村上 仙瑞（むらかみ せんずい）

1973年　大分県中津市に生まれる
1996年　熊本大学理学部数学科卒業
1998年　大阪大学大学院理学研究科数学専攻卒業
現在　甲南高等学校・中学校に勤務
甲南大学理工学部非常勤講師（2010年, 2011年）
著書に『直感でつかむ大学生の微積分（東京図書, 2007年）』がある.

イメージでつかむ　イプシロンデルタ・位相空間論

2014年12月 1 日　第1版第1刷発行

著　者　村上　仙瑞
発行者　麻畑　　仁
発行所　(有)プレアデス出版
〒399-8301　長野県安曇野市穂高有明7345-187
TEL 0263-31-5023　FAX 0263-31-5024
http://www.pleiades-publishing.co.jp
装　丁　松岡　　徹
印刷所　亜細亜印刷株式会社

落丁・乱丁本はお取り替えいたします。定価はカバーに表示してあります。
ISBN978-4-903814-70-4　C3041　　Printed in Japan